Chương 1. ĐỘ ĐO DƯƠNG-HÀM SỐ ĐO ĐƯỢC

1. TẬP ĐO ĐƯỢC

A. Ta nhắc lại một số phép toán về họ tập hợp. Cho X là tập khác trống và I là *tập các chỉ số*. Nếu ứng với một *chỉ số* $i \in I$, ta có duy nhất một tập con $A_i \subset X$, ta nói rằng ta có một *họ tập hợp* ký hiệu là $(A_i)_{i\in I}$, hay $\{A_i\}_{i\in I}$, hay $(A_i, i \in I)$, hay $\{A_i, i \in I\}$.

Ta định nghĩa *phần giao của họ tập hợp* $(A_i)_{i\in I}$, là tập con của X được ký hiệu là $\bigcap_{i\in I} A_i$ và được xác định bởi

$$\boxed{\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in X : x \in A_i \text{ với mọi } i \in I\}.} \qquad \#$$

Nói khác đi,

$$\boxed{x \in \bigcap_{i\in I} A_i \Leftrightarrow x \in A_i \text{ với mọi } i \in I.} \qquad \#$$

Ta định nghĩa *phần hội của họ tập hợp* $(A_i)_{i\in I}$, là tập con của X được ký hiệu là $\bigcup_{i\in I} A_i$ và được xác định bởi

$$\boxed{\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in X : x \in A_i \text{ với ít nhất một } i \in I\}.} \qquad \#$$

Nói khác đi,

$$\boxed{x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I : x \in A_i.} \qquad \#$$

Trường hợp riêng với

i) $I = \{1, 2, \ldots, n\}$: ta viết

$$\boxed{\begin{aligned} \bigcap_{i\in I} A_i &= \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n, \\ \bigcup_{i\in I} A_i &= \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n. \end{aligned}} \qquad \#$$

ii) $I = \mathbb{N}$: ta viết

$$\boxed{\begin{aligned} \bigcap_{i\in I} A_i &= \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots, \\ \bigcup_{i\in I} A_i &= \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots. \end{aligned}} \qquad \#$$

Chú ý:

$$\boxed{X \setminus \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} (X \setminus A_i),\ X \setminus \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} (X \setminus A_i).} \qquad \#$$

Nếu không sợ nhầm lẫn ta còn ký hiệu

$$\boxed{A^c = X \setminus A.} \qquad \#$$

Do đó:

$$\boxed{\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c,\ \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c.} \qquad \#$$

Ví dụ. (Xem như bài tập). Xác định $\bigcap_{i\in I} A_i$ và $\bigcup_{i\in I} A_i$, với $A_i = (\frac{-1}{i}, \frac{3}{2i+1})$.

B. Ta qui ước một số ký hiệu và các phép tính

$$\begin{aligned} &[-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{R}}, \\ &(-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \\ &[-\infty, \infty) = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \end{aligned} \qquad \#$$

$$a + \infty = \infty + a = \infty \text{ nếu } 0 \leq a \leq \infty, \text{ và } a.\infty = \infty.a = \begin{cases} \infty, & \text{nếu } 0 < a \leq \infty, \\ 0, & \text{nếu } a = 0. \end{cases} \qquad \#$$

Các qui tắc về dấu (âm, dương) tương tự như phép nhân thông thường), chẳng hạn

$$a.\infty = \infty.a = \begin{cases} -\infty & \text{nếu } -\infty \leq a < 0, \\ 0 & \text{nếu } a = 0. \end{cases} \qquad \#$$

C. Giới hạn trên **limsup** và giới hạn dưới **liminf**.

C1. Giới hạn trên **limsup**. Ta cho dãy số $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, ta đặt

(i) Nếu $\{a_n\}$ không bị chặn trên, ta đặt $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$.

(ii) Nếu $\{a_n\}$ bị chặn trên, ta đặt

$$\boxed{b_k = \sup\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\} = \sup_{n\geq k} a_n,\ k = 1, 2, 3, \ldots.} \qquad \#$$

Khi đó, $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \ldots$

$(ii)_1$ Nếu $\{b_k\}$ không bị chặn dưới, ta đặt $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

$(ii)_2$ Nếu $\{b_k\}$ bị chặn dưới, thì $\{b_k\} \searrow \inf_{k\geq 1} b_k$. Ta đặt

$$\boxed{\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty}\left(\sup_{n\geq k} a_n\right) = \inf_{k\geq 1}\left(\sup_{n\geq k} a_n\right).} \quad \#$$

C2. Giới hạn dưới **liminf**. Xét dãy số $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, ta đặt

(i) Nếu $\{a_n\}$ không bị chặn dưới, ta đặt $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

(ii) Nếu $\{a_n\}$ bị chặn dưới, ta đặt

$$\boxed{c_k = \inf\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\} = \inf_{n\geq k} a_n,\ k = 1, 2, 3, \ldots.} \quad \#$$

Khi đó, $c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq \ldots$

$(ii)_1$ Nếu $\{c_k\}$ không bị chặn trên, ta đặt $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

$(ii)_2$ Nếu $\{c_k\}$ bị chặn trên, thì $\{c_k\} \nearrow \sup\limits_{k\geq 1} c_k$. Ta đặt

$$\boxed{\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} c_k = \lim_{k\to\infty}\left(\inf_{n\geq k} a_n\right) = \sup_{k\geq 1}\left(\inf_{n\geq k} a_n\right).} \quad \#$$

Chú ý 1: Đôi khi người ta cũng dùng các ký hiệu $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ và $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$, lần lượt thay cho $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ và $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

Chú ý 2: Ta cũng định nghĩa $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ cho dãy $\{a_n\} \subset \overline{\mathbb{R}}$, như sau

$$\boxed{\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{k\geq 1}\left(\sup_{n\geq k} a_n\right),\ \liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{k\geq 1}\left(\inf_{n\geq k} a_n\right).} \quad \#$$

Chú ý 3:

$$\limsup_{n\to\infty} (-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n. \quad \#$$

Chú ý 4:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n. \quad \#$$

Chú ý 5: Nếu $\{a_n\}$ hội tụ thì

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n. \quad \#$$

Chú ý 6: Ta cho dãy số $\{a_n\} \subset \overline{\mathbb{R}}$, ta đặt

$$A = \left\{a \in \overline{\mathbb{R}} : a = \lim_{k\to\infty} a_{n_k},\ \text{với } \{a_{n_k}\} \text{ là dãy con của } \{a_n\}\right\}. \quad \#$$

Khi đó tồn tại $a_{\max}, a_{\min} \in A$ sao cho $a_{\min} \le a \le a_{\max}, \forall a \in A$. Khi đó ta có

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = a_{\max} \text{ và } \liminf_{n\to\infty} a_n = a_{\min}. \qquad \#$$

Ví dụ. (Xem như bài tập). Cho dãy số thực $\{a_n\}$, sao cho $\limsup_{n\to\infty} a_n \le 0 \le a_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng $a_n \to 0$.

C3. Cho dãy hàm $\{f_n\}, f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Khi đó $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ và $\liminf_{n\to\infty} f_n$ là các hàm được xác định trên X bởi

$$\boxed{\begin{aligned} &\left(\sup_n f_n\right)(x) = \sup_n f_n(x), \quad \left(\inf_n f_n\right)(x) = \inf_n f_n(x),\\ &\left(\limsup_{n\to\infty} f_n\right)(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \inf_{k\ge1}\left(\sup_{n\ge k} f_n(x)\right),\\ &\left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right)(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{k\ge1}\left(\inf_{n\ge k} f_n(x)\right),\\ &\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).\end{aligned}} \qquad \#$$

Nếu $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, tồn tại ở mọi $x \in X$, khi đó ta gọi f là **giới hạn từng điểm** của dãy $\{f_n\}$.

Định nghĩa 1.1.1. Cho X là tập khác trống. Một họ $\mathfrak{M}$ các tập con của X được gọi là một σ – *đại số* trong X nếu các điều kiện sau đây thỏa:

(i) $X \in \mathfrak{M}$,

(ii) Nếu $A \in \mathfrak{M}$ thì $X \setminus A \in \mathfrak{M}$, #

(iii) Nếu $A_j \in \mathfrak{M}, j = 1,2,\ldots$ thì $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{M}$.

Chú ý: Ta suy từ (i) – (iii), rằng

$(4i)$ $\phi \in \mathfrak{M}$, vì $\phi = X \setminus X \in \mathfrak{M}$.

$(5i)$ Nếu lấy $A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = \phi$ trong (iii), ta thấy rằng $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathfrak{M}$, nếu $A_j \in \mathfrak{M}$ với $j = 1,2,\ldots,n$.

$(6i)$ Nếu $A_j \in \mathfrak{M}, j = 1,2,\ldots$ thì $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{M}$, #
vì $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} (X \setminus A_j) \in \mathfrak{M}$.

$(7i)$ Nếu $A, B \in \mathfrak{M}$, thì $A \cap B = X \setminus (A \cup B) \in \mathfrak{M}$ và $A \setminus B = A \cap (X \setminus B) \in \mathfrak{M}$.

Định nghĩa 1.1.2. Nếu X có một σ – đại số $\mathfrak{M}$ trong X thì ta gọi cặp $(X, \mathfrak{M})$ (hoặc vắn tắt X) là một *không gian đo được* (measurable space), và phần tử của $\mathfrak{M}$ được gọi là *tập đo được trong* X.

Ví dụ 1.1.1. (Xem như bài tập). Cho X là tập khác trống và $\mathfrak{M} = \{\phi, X\}$. Nghiệm lại rằng $\mathfrak{M}$ là một σ – đại số trong X. Câu hỏi tương tự với $\mathfrak{M} = \mathcal{P}(X)$ là họ tất cả các tập con của X.

Ví dụ 1.1.2. (Xem như bài tập). Cho $X = [0,1]$ và $\mathfrak{M} = \mathcal{P}(X)$. Tập $[\frac{1}{2},1]$ có đo được không?

Ví dụ 1.1.3. (Xem như bài tập). Cho $X = [0,1]$ và $\mathfrak{M} = \{\phi, X, [0,\frac{1}{2}), [\frac{1}{2},1]\}$. Tập $[\frac{2}{3},1]$ có đo được không?

Chú thích 1.1.1. Cho $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$. Khi đó tồn tại một σ – đại số nhỏ nhất $\mathfrak{M}^*$ trong X sao cho $\mathcal{F} \subset \mathfrak{M}^*$. Ta còn gọi $\mathfrak{M}^*$ là *σ – đại số sinh bởi $\mathcal{F}$*.

Thật vậy, ta gọi Ω là họ tất cả các σ – đại số $\mathfrak{M}$ trong X chứa $\mathcal{F}$. Vì $\mathcal{P}(X)$ cũng là một σ – đại số (Ví dụ 1.1.1), nên $\Omega \neq \phi$. Gọi $\mathfrak{M}^* = \bigcap_{\mathfrak{M}\in\Omega} \mathfrak{M}$. Dễ thấy rằng $\mathcal{F} \subset \mathfrak{M}^*$, bởi vì $\mathcal{F} \subset \mathfrak{M}$ với mọi $\mathfrak{M} \in \Omega$. Ta chỉ cần chứng minh rằng $\mathfrak{M}^*$ là một σ – đại số.

Giả sử rằng $A_j \in \mathfrak{M}^*$, với $j = 1,2,\ldots$, và nếu $\mathfrak{M} \in \Omega$, thì $A_j \in \mathfrak{M}$, như vậy $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{M}$, bởi vì $\mathfrak{M}$ là một σ – đại số. Vì $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{M}$, với mọi $\mathfrak{M} \in \Omega$, ta kết luận rằng $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{M}^*$. Hai tính chất còn lại trong định nghĩa $X \in \mathfrak{M}^*$, và $X \setminus A \in \mathfrak{M}^*$ với mọi $A \in \mathfrak{M}^*$ được chứng minh tương tự.

Định nghĩa 1.1.3. (*Độ đo dương*) Cho X là một không gian đo được với một σ – đại số $\mathfrak{M}$ và cho hàm $\mu : \mathfrak{M} \to [0,\infty]$. Ta nói μ là một *độ đo dương* trên $\mathfrak{M}$ nếu μ thoả mãn các tính chất sau:

(i) Tính chất cộng đếm được (countably additive): $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$, nếu $A_j \in \mathfrak{M}$, $j = 1,2,\ldots$ và $A_i \cap A_j = \phi$, $\forall i \neq j$. #

(ii) $\exists A \in \mathfrak{M} : \mu(A) < \infty$.

Định nghĩa 1.1.4. (*Độ đo phức*) Cho X là một không gian đo được với một σ – đại số $\mathfrak{M}$ và cho hàm $\mu : \mathfrak{M} \to \mathbb{C}$. Ta nói μ là một *độ đo phức* trên $\mathfrak{M}$ nếu μ thoả mãn tính chất sau:

$$\boxed{\mu(\textstyle\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j), \text{ nếu } A_j \in \mathfrak{M}, j = 1,2,\ldots \text{ và } A_i \cap A_j = \phi, \forall i \neq j.} \quad \#$$

Định nghĩa 1.1.5. Cho X là một không gian đo được với một σ – đại số $\mathfrak{M}$ và cho hàm μ là một độ đo (dương hoặc phức) trên $\mathfrak{M}$. Ta nói $(X,\mathfrak{M},\mu)$ là một *không gian đo* (measure space).

Chú thích 1.1.2.

(i) Với độ đo phức, chuỗi $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$ hội tụ với mọi dãy $\{A_j\}$ rời nhau như trên, là hội tụ tuyệt đối.

(ii) Nếu μ là một độ đo dương và nếu $A, B \in \mathfrak{M}$, và $A \subset B$ thì $\mu(A) \leq \mu(B)$. (Xem Ví dụ 1.1.6).

(iii) Cũng vậy, nếu $A_j \in \mathfrak{M}$, $j = 1,2,\ldots$ và $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$, thì $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \mu(A_n)$. (Xem Ví dụ 1.1.7).

(iv) Tương tự, nếu $A_j \in \mathfrak{M}, j = 1,2,\dots$ và $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$, và $\mu(A_1) < \infty$, thì $\mu(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mu(A_n)$. (Xem Ví dụ 1.1.8).

(vi) Nếu μ là một độ đo dương và nếu $A_j \in \mathfrak{M}, j = 1,2,\dots$, thì $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$. (Xem Ví dụ 1.1.9).

Ví dụ 1.1.4. (Xem như bài tập). Cho $(X,\mathfrak{M},\mu)$ là một không gian đo với μ là một độ đo dương trên $\mathfrak{M}$ Chứng minh rằng $\mu(\phi) = 0$.

Hướng dẫn: Lấy $A_1 = A, A_2 = \phi, \dots, A_{n+1} = \phi, \dots$, ta có $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ và $\mu(A) < \infty$. Từ tính chất cộng đếm được, $\infty > \mu(A) = \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$. Do chuỗi $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$ hội tụ nên $\lim\limits_{j\to+\infty} \mu(A_j) = 0$, mà $A_j = \phi$ với mọi $j \ge 2$, nên $\mu(\phi) = \lim\limits_{j\to+\infty} \mu(A_j) = 0$.

Ta cũng chú ý rằng, với độ đo dương μ, điều kiện (ii) $\exists A \in \mathfrak{M} : \mu(A) < \infty$ trong định nghĩa 1.1.3 có nghĩa là $\mu \ne \infty$ mà có thể thay bằng điều kiện tương đương $\mu(\phi) = 0$. Ví dụ 1.1.4. chỉ ra rằng $\mu \ne \infty \Rightarrow \mu(\phi) = 0$. Đảo lại, thì hiển nhiên, vì ta lấy $A = \phi$.

Ví dụ 1.1.5. (Xem như bài tập). Cho $(X,\mathfrak{M},\mu)$ là một không gian đo với μ là một độ đo dương trên $\mathfrak{M}$. Chứng minh rằng (tính chất cộng hữu hạn): $\mu(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$, nếu $A_j \in \mathfrak{M}, j = 1,2,\dots,n$, và $A_i \cap A_j = \phi, \forall i \ne j$.

Hướng dẫn: Lấy $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \phi$, ta có $\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Vậy
$\mu(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) = \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j) + \sum_{j=n+1}^{\infty} \mu(A_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$.

Ví dụ 1.1.6. (Xem như bài tập). Cho $(X,\mathfrak{M},\mu)$ là một không gian đo với μ là một độ đo dương trên $\mathfrak{M}$ Chứng minh rằng nếu $A, B \in \mathfrak{M}$, và $A \subset B$ thì $\mu(A) \le \mu(B)$.

Ta có $B = A \cup (B \setminus A)$ và $A \cap (B \setminus A) = \phi$. Ta suy từ Ví dụ 1.1.5 rằng
$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \ge \mu(A)$.

Ví dụ 1.1.7. (Xem như bài tập). Cho $(X,\mathfrak{M},\mu)$ là một không gian đo với μ là một độ đo dương trên $\mathfrak{M}$. Chứng minh rằng, nếu $A_j \in \mathfrak{M}, j = 1,2,\dots$ và $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, thì $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mu(A_n)$.

Hướng dẫn: Đặt $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, \dots, B_j = A_j \setminus A_{j-1}$ với $j = 2,3,4,\dots$. Khi đó $B_j \in \mathfrak{M}$, và $B_i \cap B_j = \phi, \forall i \ne j, A_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$ và $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$. Do đó

$$\mu(A_n) = \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j) \text{ và}$$
$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$
#

Ví dụ 1.1.8. (Xem như bài tập). Cho $(X,\mathfrak{M},\mu)$ là một không gian đo với μ là một độ đo dương trên $\mathfrak{M}$. Chứng minh rằng, nếu $A_j \in \mathfrak{M}, j = 1,2,\dots$ và $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$, và $\mu(A_1) < \infty$, thì $\mu(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mu(A_n)$. Cho một phản thí dụ để thấy điều kiện "$\mu(A_1) < \infty$" không thể bỏ qua được.

Hướng dẫn: Đặt $C_j = A_1 \setminus A_j$. Khi đó $C_j \in \mathfrak{M}$, và $C_1 \subset C_2 \subset C_3 \subset \dots$,

$\mu(C_j) = \mu(A_1) - \mu(A_j)$,

$$\cup_{j=1}^{\infty} C_j = \cup_{j=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_j) = A_1 \setminus \cap_{j=1}^{\infty} A_j. \qquad \#$$

Ta suy từ Ví dụ 1.1.7 rằng

$$\begin{aligned} \mu(A_1) - \mu(\cap_{j=1}^{\infty} A_j) &= \mu(A_1 \setminus \cap_{j=1}^{\infty} A_j) = \mu(\cup_{j=1}^{\infty} C_j) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \mu(C_n) = \mu(A_1) - \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n). \end{aligned} \qquad \#$$

Vậy $\mu(\cap_{j=1}^{\infty} A_j) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$.

Phản thí dụ: Ta lấy $X = \mathbb{N}$, và μ là *độ đo đếm* trên X, (Xem ví dụ 1.1.10). Giả sử $A_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$. Khi đó $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots, \cap_{n=1}^{\infty} A_n = \phi$, nhưng $\mu(A_n) = \infty$ với mọi $n = 1,2,3,\ldots$, tức là $\mu(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) \neq \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$.

Ví dụ 1.1.9. (Xem như bài tập). Cho $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ là một không gian đo với μ là một độ đo dương trên $\mathfrak{M}$. Chứng minh rằng, nếu $A_j \in \mathfrak{M}$, $j = 1,2,\ldots$, thì $\mu(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$.

Hướng dẫn: Đặt $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \ldots, B_j = A_j \setminus (\cup_{n=1}^{j-1} A_n)$ với $j = 2,3,4,\ldots$. Khi đó $B_j \in \mathfrak{M}$, và $B_i \cap B_j = \phi$, $\forall i \neq j$, $\cup_{j=1}^{\infty} A_j = \cup_{j=1}^{\infty} B_j$ và $B_j \subset A_j$ với $j \in \mathbb{N}$. Do đó

$$\mu(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) = \mu(\cup_{j=1}^{\infty} B_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j). \qquad \#$$

Ví dụ 1.1.10. (Xem như bài tập). Cho X là tập bất kỳ, với $E \subset X$, ta định nghĩa $\mu(X) = \infty$ nếu E là tập vô hạn và $\mu(E)$ là số phần tử trong E nếu E là tập hữu hạn. Khi đó $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ là một không gian đo với độ đo μ gọi là một *độ đo đếm* (*counting measure*) trên X.

Ví dụ 1.1.11. (Xem như bài tập). Cho X là tập bất kỳ, và cho $x_0 \in X$ cố định. Ta định nghĩa

$$\mu(E) = \begin{cases} 1 & x_0 \in E, \\ 0 & x_0 \notin E, \end{cases} \qquad \#$$

với $E \subset X$. Khi đó, μ là độ đo trên $\mathcal{P}(X)$. Ta gọi μ là *khối lượng đơn vị tập trung tại* x_0.

Ví dụ 1.1.12. (Xem như bài tập). Cho $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ là một không gian đo, và $f : X \to Y$ là một song ánh. Ta đặt $\mathfrak{N} = \{f(E) : E \in \mathfrak{M}\}$, và $\nu(D) = \mu(f^{-1}(D))$, $\forall D \in \mathfrak{N}$. Chứng minh rằng, Cho $(Y, \mathfrak{N}, \nu)$ là một không gian đo.

Hướng dẫn:

(a) $(Y, \mathfrak{N})$ là một không gian đo được:

(i) $Y \in \mathfrak{N}$ vì $Y = f(X)$, $X \in \mathfrak{M}$,

(ii) $Y \setminus D \in \mathfrak{N}$ $\forall D \in \mathfrak{N}$ vì, $Y \setminus D = f(X) \setminus f(E) = f(X \setminus E)$, $X \setminus E \in \mathfrak{M}$,

(iii) Nếu $D_j \in \mathfrak{N}$, $j = 1,2,\ldots$ và $\cup_{j=1}^{\infty} D_j = \cup_{j=1}^{\infty} f(E_j) = f(\cup_{j=1}^{\infty} E_j)$, $\cup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathfrak{M}$.

(b) v là một độ đo dương trên $(Y, \mathfrak{N})$.

(i) $\exists D \in \mathfrak{N} : v(D) < \infty$.???. Theo giả thiết ta có $\exists E \in \mathfrak{M} : \mu(E) < \infty$. Chọn $D = f(E)$, ta có $D \in \mathfrak{N}$ và $v(D) = \mu(f^{-1}(D)) = \mu(E) < \infty$.

(ii) Tính chất cộng đếm được: Nếu $D_j = f(E_j) \in \mathfrak{N}$, $j = 1,2,\ldots$ và $D_i \cap D_j = \phi$, $\forall i \neq j$, ta có $E_j \in \mathfrak{N}$, $j = 1,2,\ldots$ và $E_i \cap E_j = f^{-1}(D_i) \cap f^{-1}(D_j) = f^{-1}(D_i \cap D_j) = \phi$, $\forall i \neq j$. Do tính chất cộng đếm được của μ, ta được

$$\boxed{\begin{aligned} v(\cup_{j=1}^{\infty} D_j) &= \mu(f^{-1}(\cup_{j=1}^{\infty} D_j)) = \mu(\cup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(D_j)) = \mu(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(f^{-1}(D_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} v(D_j). \end{aligned}} \qquad \#$$

Định nghĩa 1.1.6. (Đầy đủ hóa một không gian đo) Cho $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ là một không gian đo. Đặt

$$\mathfrak{M}^* = \{E \subset X : \exists A, B \in \mathfrak{M} \text{ sao cho } A \subset E \subset B \text{ và } \mu(B \setminus A) = 0\}. \qquad \#$$

Ta đặt $\mu^*(E) = \mu(A)$.

Định lý 1.1.6. *$(X, \mathfrak{M}^*, \mu^*)$ là một không gian đo.*

Định nghĩa 1.1.7. $(X, \mathfrak{M}^*, \mu^*)$ được gọi là *đầy đủ hóa* của $(X, \mathfrak{M}, \mu)$. Nếu $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}$ thì ta gọi μ là *một độ đo đầy đủ.*

Hướng dẫn chứng minh định lý 1.1.6: Trước hết ta kiểm tra lại rằng μ^* được xác định tốt với mọi $E \in \mathfrak{M}^*$. Giả sử rằng $A \subset E \subset B$, $A_1 \subset E \subset B_1$ và $\mu(B \setminus A) = \mu(B_1 \setminus A_1) = 0$, với A, B, A_1, $B_1 \in \mathfrak{M}$. Chú ý rằng

$$A \setminus A_1 \subset E \setminus A_1 \subset B_1 \setminus A_1, \qquad \#$$

do đó ta có $\mu(A \setminus A_1) = 0$, do đó $\mu(A) = \mu(A \cap A_1) + \mu(A \setminus A_1) = \mu(A \cap A_1)$. Lý luận tương tự, $\mu(A_1) = \mu(A_1 \cap A)$. Vậy ta có $\mu(A_1) = \mu(A)$. Tiếp theo, nghiệm lại rằng $\mathfrak{M}^*$ thoả 3 tính chất của một σ – đại số.

(i) $X \in \mathfrak{M}^*$, bởi vì $X \in \mathfrak{M}$ và $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}^*$.

(ii) Giả sử rằng $A \subset E \subset B$, khi đó $X \setminus B \subset X \setminus E \subset X \setminus A$. Vậy $E \in \mathfrak{M}^*$dẫn đến $X \setminus E \in \mathfrak{M}^*$, bởi vì $(X \setminus A) \setminus (X \setminus B) = (X \setminus A) \cap B = B \setminus A$, $\mu((X \setminus A) \setminus (X \setminus B)) = \mu(B \setminus A) = 0$.

(iii) Giả sử rằng $A_i \subset E_i \subset B_i$, $E = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$, $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$, $B = \cup_{i=1}^{\infty} B_i$, khi đó $A \subset E \subset B$ và

$$B \setminus A = \cup_{i=1}^{\infty} (B_i \setminus A) \subset \cup_{i=1}^{\infty} (B_i \setminus A_i). \qquad \#$$

Vì hội đếm được các tập có độ đo zero cũng là tập có độ đo zero, do đó $0 \le \mu(B \setminus A) \le \mu(\cup_{i=1}^{\infty} (B_i \setminus A_i)) = 0$. Ta suy ra rằng $\mu(B \setminus A) = 0$, như vậy $E = \cup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathfrak{M}^*$, nếu $E_i \in \mathfrak{M}^*$ với $i = 1, 2, 3, \ldots$

Cuối cùng, nếu các tập $E_i \in \mathfrak{M}^*$ là rời nhau từng đôi một như trong bước (iii), thì các tập A_i cũng rời nhau từng đôi một giống như vậy, và ta kết luận rằng

$$\mu^*(E) = \mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i). \qquad \#$$

Điều nầy chứng tỏ rằng μ^* cộng đếm được trên $\mathfrak{M}^*$.

2. HÀM ĐO ĐƯỢC

Định nghĩa 1.2.1. Cho $(X, \mathfrak{M})$ là một không gian đo được, hàm $s : X \to \mathbb{C}$ có dạng dưới đây được gọi là một *hàm đơn giản* (simple function), vắn tắt gọi là *hàm đơn* hay *hàm bậc thang*

$$s(x) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{A_j}(x) \ \forall x \in X, \qquad \#$$

với $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$, $A_1, \ldots, A_m \in \mathfrak{M}$, trong đó

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \in X \setminus A. \end{cases} \qquad \#$$

Định nghĩa 1.2.2. Cho $(X, \mathfrak{M})$ là một không gian đo được, và hàm $f : X \to [-\infty, \infty]$. Ta gọi f là một *hàm thực đo được* trên $(X, \mathfrak{M})$ nếu $f^{-1}((a, \infty]) = \{x \in X : f(x) > a\} \in \mathfrak{M}$ với mọi $a \in \mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.2.3. Cho $(X, \mathfrak{M})$ là một không gian đo được, và hai hàm $u, v : X \to \mathbb{R}$. Ta gọi $f = u + iv$ là một *hàm phức đo được* trên $(X, \mathfrak{M})$ nếu u và v là các hàm đo được trên $(X, \mathfrak{M})$.

Ví dụ 1.2.1. (Xem như bài tập). Cho $(X, \mathfrak{M})$ là một không gian đo được và hàm $f : X \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ hàm thực đo được trên $(X, \mathfrak{M})$. Chứng minh rằng các tập $f^{-1}((a, \infty]), f^{-1}([-\infty, a)), f^{-1}((-\infty, a)), f^{-1}((a, \infty)), f^{-1}([a, b)), f^{-1}((a, b]), f^{-1}((a, b))$ và $f^{-1}(\{a\})$ là đo được.

Hướng dẫn:

(j) $f^{-1}((a, \infty]) \in \mathfrak{M}\ \forall a \in \mathbb{R}$. (Do định nghĩa).

(jj) $f^{-1}([-\infty, a)) \in \mathfrak{M}\ \ \forall a \in \mathbb{R}$.? Chú ý rằng

$$\boxed{[-\infty, a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-\infty, a - \tfrac{1}{n}] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\overline{\mathbb{R}} \setminus (a - \tfrac{1}{n}, \infty]\right),}$$

vì

$$\boxed{x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [-\infty, a - \tfrac{1}{n}] \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : x \in [-\infty, a - \tfrac{1}{n}] \Leftrightarrow -\infty \le x < a.}$$

Vậy

$$\begin{aligned} f^{-1}([-\infty,a)) &= f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\overline{\mathbb{R}}\setminus(a-\tfrac{1}{n},\infty]\right)\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\overline{\mathbb{R}}\setminus(a-\tfrac{1}{n},\infty]\right) \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[f^{-1}(\overline{\mathbb{R}})\setminus f^{-1}((a-\tfrac{1}{n},\infty])\right] \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(X\setminus f^{-1}((a-\tfrac{1}{n},\infty])\right) \in \mathfrak{M}, \end{aligned}$$

do định nghĩa 1.1.1.(i)-(iii), (6i).

(jjj) $f^{-1}((-\infty,a)) \in \mathfrak{M}\ \forall a \in \mathbb{R}$. ? Chú ý rằng

$$\begin{aligned} (-\infty,a) &= \bigcup_{n=1}^{\infty}(-n,a-\tfrac{1}{n}] = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left([-\infty,a-\tfrac{1}{n}]\cap(-n,\infty]\right) \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\left(\overline{\mathbb{R}}\setminus(a-\tfrac{1}{n},\infty]\right)\cap(-n,\infty]\right), \end{aligned}$$

vì

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}(-n,a-\tfrac{1}{n}] \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{N} : x\in(-n,a-\tfrac{1}{n}] \Leftrightarrow -\infty < x < a.$$

Vậy

$$\begin{aligned} f^{-1}((-\infty,a)) &= f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\left(\overline{\mathbb{R}}\setminus(a-\tfrac{1}{n},\infty]\right)\cap(-n,\infty]\right)\right) \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[f^{-1}\left(\left(\overline{\mathbb{R}}\setminus(a-\tfrac{1}{n},\infty]\right)\cap(-n,\infty]\right)\right] \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[f^{-1}\left(\overline{\mathbb{R}}\setminus(a-\tfrac{1}{n},\infty]\right)\cap f^{-1}((-n,\infty])\right] \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\left(f^{-1}(\overline{\mathbb{R}})\setminus f^{-1}((a-\tfrac{1}{n},\infty])\right)\cap f^{-1}((-n,\infty])\right] \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[(X\setminus f^{-1}((a-\tfrac{1}{n},\infty]))\cap f^{-1}((-n,\infty])\right] \in \mathfrak{M}, \end{aligned}$$

do định nghĩa 1.1.1.(i)–(iii), (7i).

(4j) $f^{-1}((a,\infty)) \in \mathfrak{M}\ \forall a \in \mathbb{R}$. ? Chú ý rằng

$$\begin{aligned} (a,\infty) &= \bigcup_{n=1}^{\infty}[a+\tfrac{1}{n},n) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left([-\infty,n)\cap[a+\tfrac{1}{n},\infty]\right) \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty}\left([-\infty,n)\cap\left(\overline{\mathbb{R}}\setminus[-\infty,a+\tfrac{1}{n})\right)\right), \end{aligned}$$

vì

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}[a+\tfrac{1}{n},n) \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{N} : x\in[a+\tfrac{1}{n},n) \Leftrightarrow a < x < \infty.$$

Vậy

$$\begin{aligned} f^{-1}((a,\infty)) &= f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left([-\infty,n)\cap\left(\overline{\mathbb{R}}\setminus[-\infty,a+\tfrac{1}{n})\right)\right)\right) \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left([-\infty,n)\cap\left(\overline{\mathbb{R}}\setminus[-\infty,a+\tfrac{1}{n})\right)\right) \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[f^{-1}([-\infty,n))\cap f^{-1}\left(\overline{\mathbb{R}}\setminus[-\infty,a+\tfrac{1}{n})\right)\right] \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty}[f^{-1}([-\infty,n))\cap(X\setminus f^{-1}([-\infty,a+\tfrac{1}{n})))] \in \mathfrak{M}, \end{aligned}$$

do (jj) và định nghĩa 1.1.1.(i)–(iii), (7i).

(5j) $f^{-1}([a,b)) \in \mathfrak{M}\ \forall a,b \in \mathbb{R}$. ? Chú ý rằng
$[a,b) = [-\infty,b)\cap[a,\infty] = [-\infty,b)\cap\left(\overline{\mathbb{R}}\setminus[-\infty,a)\right)$.

Vậy

$$\begin{aligned} f^{-1}([a,b)) &= f^{-1}\left([-\infty,b)\cap\left(\overline{\mathbb{R}}\setminus[-\infty,a)\right)\right) \\ &= f^{-1}\left([-\infty,b)\right)\cap f^{-1}\left(\overline{\mathbb{R}}\setminus[-\infty,a)\right) \\ &= f^{-1}\left([-\infty,b)\right)\cap[X\setminus f^{-1}([-\infty,a))] \in \mathfrak{M}, \end{aligned}$$

do (jj) và định nghĩa 1.1.1.(i)–(ii), (7i).

(6j) $f^{-1}((a,b]) \in \mathfrak{M}\ \forall a,b \in \mathbb{R}$. ? Chú ý rằng $(a,b] = [-\infty,b]\cap(a,\infty] = \left(\overline{\mathbb{R}}\setminus(b,\infty]\right)\cap(a,\infty]$.

Vậy

$$\begin{aligned} f^{-1}((a,b]) &= f^{-1}\left(\left(\overline{\mathbb{R}}\setminus(b,\infty]\right)\cap(a,\infty]\right) \\ &= f^{-1}\left(\overline{\mathbb{R}}\setminus(b,\infty]\right)\cap f^{-1}((a,\infty]) \\ &= [X\setminus f^{-1}((b,\infty])]\cap f^{-1}((a,\infty]) \in \mathfrak{M}, \end{aligned}$$

do định nghĩa 1.1.1.(i)–(ii), (7i).

(7j) $f^{-1}((a,b)) \in \mathfrak{M}\ \forall a,b \in \mathbb{R}$. ? Chú ý rằng $(a,b) = [-\infty,b)\cap(a,\infty]$.
Vậy

$$\begin{aligned} f^{-1}((a,b)) &= f^{-1}([-\infty,b)\cap(a,\infty]) \\ &= f^{-1}([-\infty,b))\cap f^{-1}((a,\infty]) \in \mathfrak{M}, \end{aligned}$$

do (jj) và định nghĩa 1.1.1. (7i).

(8j) $f^{-1}(\{a\}) \in \mathfrak{M}\ \forall a \in \mathbb{R}$.? Chú ý rằng

$$\{a\} = [-\infty,a]\cap[a,\infty] = \left(\overline{\mathbb{R}}\setminus(a,\infty]\right)\cap\left(\overline{\mathbb{R}}\setminus[-\infty,a)\right).$$

Vậy

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\{a\}) &= f^{-1}\Big(\big(\overline{\mathbb{R}} \setminus (a,\infty]\big) \cap \big(\overline{\mathbb{R}} \setminus [-\infty,a)\big)\Big) \\
&= f^{-1}\big(\overline{\mathbb{R}} \setminus (a,\infty]\big) \cap f^{-1}\big(\overline{\mathbb{R}} \setminus [-\infty,a)\big) \\
&= \big[f^{-1}(\overline{\mathbb{R}}) \setminus f^{-1}((a,\infty])\big] \cap \big[f^{-1}(\overline{\mathbb{R}}) \setminus f^{-1}([-\infty,a))\big] \\
&= [X \setminus f^{-1}((a,\infty])] \cap [X \setminus f^{-1}([-\infty,a))] \in \mathfrak{M},
\end{aligned}$$

do định nghĩa 1.1.1.(i) – (iii), (7i).

Ví dụ 1.2.2. (Xem như bài tập). Cho $(X,\mathfrak{M})$ là một không gian đo được và hàm $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ hàm thực đo được trên $(X,\mathfrak{M})$. Giả sử $f^{-1}(X) \subset \mathbb{R}$ là tập hữu hạn. Chứng minh rằng f là hàm đơn.

Hướng dẫn: Giả sử $f(X) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\} \subset \mathbb{R}$, $\alpha_i \neq \alpha_j \ \ \forall i \neq j$. Khi đó $A_i = f^{-1}(\{\alpha_i\}) \in \mathfrak{M}$, và $f = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{A_j}$.

Ví dụ 1.2.3. (Xem như bài tập). Cho $(X,\mathfrak{M})$ là một không gian đo được và hàm hằng $f = C$ là đo được trên $(X,\mathfrak{M})$.

Hướng dẫn: Thật vậy, nếu $a \geq C$, thì $f^{-1}((a,\infty]) = \{x \in X : f(x) > a\} = \phi \in \mathfrak{M}$, còn nếu như nếu $a < C$, thì $f^{-1}((a,\infty]) = \{x \in X : f(x) > a\} = X \in \mathfrak{M}$.

Ví dụ 1.2.4. (Xem như bài tập). Cho $(X,\mathfrak{M})$ là một không gian đo được và hàm $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ hàm thực đo được trên $(X,\mathfrak{M})$, và $k \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng kf là hàm đo được trên $(X,\mathfrak{M})$.

Hướng dẫn: Thật vậy, nếu $k > 0$, thì $\{x \in X : kf(x) > a\} = \{x \in X : f(x) > \frac{a}{k}\} \in \mathfrak{M}$, còn nếu như nếu $k \leq 0$, thì hiển nhiên.

Ví dụ 1.2.5. (Xem như bài tập). Cho $(X,\mathfrak{M})$ là một không gian đo được và và hàm $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ hai hàm thực đo được trên $(X,\mathfrak{M})$. Chứng minh rằng $f+g$, $f-g$ là hàm đo được trên $(X,\mathfrak{M})$.

Hướng dẫn:

a) $f+g$ là hàm đo được.

$$f(x)+g(x) > a \Leftrightarrow f(x) > a - g(x) \Leftrightarrow \exists r_n \in \mathbb{Q} : f(x) > r_n > a - g(x).$$

Vậy thì

$$\begin{aligned}
\{x \in X : f(x)+g(x) > a\} &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > r_n > a - g(x)\} \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > r_n\} \cap \{x \in X : g(x) > a - r_n\} \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}((r_n,\infty]) \cap g^{-1}((a-r_n,\infty]) \in \mathfrak{M}.
\end{aligned}$$

b) $f-g$ là hàm đo được??: Ta có g là hàm đo được, suy ra $(-g)$ là hàm đo được. Vậy $f-g = f+(-g)$. cũng là hàm đo được.

Ví dụ 1.2.6. (Xem như bài tập). Cho $(X,\mathfrak{M})$ là một không gian đo được và hàm $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ hàm thực đo được trên $(X,\mathfrak{M})$, và $\alpha > 0$. Chứng minh rằng $|f(x)|^{\alpha}$ là hàm đo được trên $(X,\mathfrak{M})$.

Hướng dẫn: Ta có $\forall a > 0$, rằng

$$\{x \in X : |f(x)|^{\alpha} > a\} = \{x \in X : |f(x)| > a^{1/\alpha}\}$$
$$= \{x \in X : f(x) > a^{1/\alpha}\} \cup \{x \in X : f(x) < -a^{1/\alpha}\} \in \mathfrak{M}.$$

Còn nếu như $a \leq 0$, thì $\{x \in X : |f(x)|^{\alpha} > a\} = X \in \mathfrak{M}$.

Ví dụ 1.2.7. (Xem như bài tập). Cho $(X, \mathfrak{M})$ là một không gian đo được và và hàm $f, g : X \to \mathbb{R}$ hai hàm thực đo được trên $(X, \mathfrak{M})$. Chứng minh rằng $f \pm g$, fg, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ là hàm đo được trên $(X, \mathfrak{M})$.

Hướng dẫn: Dựa vào các đẳng thức

$$fg = \tfrac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2],$$
$$\max\{f, g\} = \tfrac{1}{2}[f + g + |f - g|],$$
$$\min\{f, g\} = \tfrac{1}{2}[f + g - |f - g|].$$

Còn nếu như $a \leq 0$, thì $\{x \in X : |f(x)|^{\alpha} > a\} = X \in \mathfrak{M}$.

Ví dụ 1.2.8. (Xem như bài tập). Cho $(X, \mathfrak{M})$ là một không gian đo được và hàm f, $g : X \to \mathbb{R}$ hai hàm thực đo được trên $(X, \mathfrak{M})$. Chứng minh rằng, nếu g không triệt tiêu thì $\frac{f}{g}$ là hàm đo được trên $(X, \mathfrak{M})$.

Hướng dẫn: (i) Chú ý rằng, $\frac{1}{g^2}$ là đo được vì, với mọi $a \in \mathbb{R}$,

Nếu $a \leq 0$: $\left(\frac{1}{g^2}\right)^{-1}((a, \infty]) = \{x \in X : \frac{1}{g^2(x)} > a\} = X \in \mathfrak{M}$.

Nếu $a > 0$: $\left(\frac{1}{g^2}\right)^{-1}((a, \infty]) = \{x \in X : \frac{1}{g^2(x)} > a\}$

$$= \{x \in X : |g(x)| < \tfrac{1}{\sqrt{a}}\}$$
$$= \{x \in X : g(x) > -\tfrac{1}{\sqrt{a}}\} \cap \{x \in X : -g(x) > -\tfrac{1}{\sqrt{a}}\} \in \mathfrak{M}.$$

(ii) Ta có $\frac{f}{g} = \frac{1}{g^2}(fg)$ là đo được.

Ví dụ 1.2.9. (Xem như bài tập). Cho $(X, \mathfrak{M})$ là một không gian đo được và cho dãy hàm số đo được $\{f_n\}$, $f_n : X \to \mathbb{R}$. Chứng minh rằng, $\sup\limits_n f_n$, $\inf\limits_n f_n$, $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ và $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ là các hàm đo được. Nếu tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ thì nó cũng là hàm đo được.

Hướng dẫn:

(i) Với mọi $a \in \mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned}
\{x \in X : \sup_n f_n(x) > a\} &= X \setminus \{x \in X : \sup_n f_n(x) \leq a\} \\
&= X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) \leq a\} \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(X \setminus \{x \in X : f_n(x) \leq a\}\right) \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) > a\} \in \mathfrak{M}.
\end{aligned}$$

(ii) $\inf_n f_n$ là hàm đo được, vì $\inf_n f_n = -\sup_n (-f_n)$.

(iii) $\limsup_{n\to\infty} f_n$ là hàm đo được, vì $\limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \inf_{k\geq 1}\left(\sup_{n\geq k} f_n(x)\right)$.

(iv) $\liminf_{n\to\infty} f_n$ là hàm đo được, vì $\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{k\geq 1}\left(\inf_{n\geq k} f_n(x)\right)$.

(iv) Nếu tồn tại $\lim_{n\to\infty} f_n$ thì $\lim_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n$ cũng là hàm đo được.

Ví dụ 1.2.10. (Xem như bài tập). Cho $(X,\mathfrak{M})$ là một không gian đo được. Chứng minh rằng

$$\chi_A \text{ là các hàm đo được} \Leftrightarrow A \in \mathfrak{M}.$$

Hướng dẫn:

(i) χ_A là các hàm đo được $\Rightarrow A \in \mathfrak{M}$.

Thật vậy $A = \{x \in X : \chi_A(x) = 1\} = \chi_A^{-1}(\{1\}) \in \mathfrak{M}$.

(ii) $A \in \mathfrak{M} \Rightarrow \chi_A$ là các hàm đo được.

Thật vậy, với mọi $a \in \mathbb{R}$, ta có

(j) $a \geq 1 : \{x \in X : \chi_A(x) > a\} = \phi \in \mathfrak{M}$,

(jj) $a < 0 : \{x \in X : \chi_A(x) > a\} = X \in \mathfrak{M}$,

(jjj) $0 \leq a < 1 : \{x \in X : \chi_A(x) > a\} = A \in \mathfrak{M}$.

Ví dụ 1.2.11. (Xem như bài tập). Cho $(X,\mathfrak{M})$ là một không gian đo được. Chứng minh rằng hàm đơn $s = \sum_{j=1}^m \alpha_j \chi_{A_j}$, với $\alpha_1,\ldots,\alpha_m \in \mathbb{R}$, $A_1,\ldots,A_m \in \mathfrak{M}$, là hàm đo được.

Hướng dẫn: (Xem như bài tập).

Định lý 1.2.1. Cho $(X,\mathfrak{M})$ là một không gian đo được, và hàm $f : X \to [-\infty,\infty]$ là một hàm đo được trên $(X,\mathfrak{M})$. Khi đó tồn tại một dãy các hàm đơn $\{s_n\}$ sao cho

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x),\ \forall x \in X.$$

Nếu $f(x) \geq 0,\ \forall x \in X$, thì có thể chọn dãy $\{s_n\}$ sao cho

$$0 \leq s_n(x) \leq s_{n+1}(x) \leq \ldots \leq f(x),\quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in X,$$
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x),\quad \forall x \in X.$$

Chứng minh.

(i) Giả sử $f(x) \geq 0,\ \forall x \in X$, thì xét một dãy các hàm đơn $\{s_n\}$ như sau

$$s_n(x) = \begin{cases} n, & \text{nếu } f(x) \geq n, \\ \frac{i-1}{2^n}, & \text{nếu } \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n},\ (1 \leq i \leq n2^n). \end{cases}$$

Dễ thấy s_n là hàm đơn, vì $s_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n}\chi_{E_{n,i}} + n\chi_{F_n}$, với $E_{n,i} = f^{-1}([\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}))$,

$F_n = f^{-1}([n,\infty])$.

Hơn nữa $s_{n+1}(x) \geq s_n(x) \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X$. Ta nghiệm lại rằng $f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$, $\forall x \in X$.

Cũng chú ý rằng

$$f^{-1}([0,n)) = \bigcup_{i=1}^{n2^n} f^{-1}([\tfrac{i-1}{2^n}, \tfrac{i}{2^n})) = \bigcup_{i=1}^{n2^n} E_{n,i},$$

$$X = f^{-1}([0,\infty]) = f^{-1}([0,n)) \cup f^{-1}([n,\infty]) = \bigcup_{i=1}^{n2^n} f^{-1}([\tfrac{i-1}{2^n}, \tfrac{i}{2^n})) \cup f^{-1}([n,\infty]).$$

• Nếu $f(x) < \infty$, thì tồn tại $n > f(x)$. Do đó, có $i : \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n}$, do vậy $s_n(x) = \frac{i-1}{2^n}$. Suy ra $|s_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^n} \to 0$, khi $n \to \infty$.

• Nếu $f(x) = \infty$, thì $f(x) \geq n$ với mọi n. Do đó, $s_n(x) = n \to \infty$.

Vậy $f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x),\ \forall x \in X$.

(ii) Xét f tùy ý. Ta viết $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, với $f^+(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x))$, $f^-(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x))$ là các hàm đo được, không âm. Theo như trên thì có hai dãy hàm đơn $\{s_n^+\}$, $\{s_n^-\}$ lần lượt hội tụ từng điểm đến các hàm f^+, f^-. Do đó $s_n = s_n^+ - s_n^-$ là hàm đơn và $s_n = s_n^+ - s_n^- \to f^+ - f^- = f$.

Chương 2. TÍCH PHÂN VỚI ĐỘ ĐO DƯƠNG TỔNG QUÁT

1. TÍCH PHÂN HÀM DƯƠNG ĐO ĐƯỢC

Định nghĩa 2.1.1. Cho $(X, \mathfrak{M})$ là một không gian đo được và cho hàm μ là một độ đo trên $\mathfrak{M}$. Cho $E \in \mathfrak{M}$ và một hàm đơn không âm $s = \sum_{j=1}^m \alpha_j \chi_{A_j}$. Ta đặt

$$\boxed{\int_E s d\mu = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(E \cap A_j),}$$

và ta gọi $\int_E s d\mu$ là tích phân của s trên E.

Chú thích 2.1.1. Qui ước $0.\infty = 0$ được dùng ở đây; có thể xảy ra rằng $\alpha_j = 0$ và $\mu(E \cap A_j) = \infty$ với một j nào đó.

Định nghĩa 2.1.2. Cho $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ là một không gian đo, cho $E \in \mathfrak{M}$ và một hàm $f : X \to [0,\infty]$ đo được trên $(X, \mathfrak{M})$. Ta đặt

$$\boxed{\int_E f d\mu = \sup\left\{\int_E s d\mu \,:\, s \text{ là hàm đơn trên } X \text{ sao cho } 0 \le s \le f\right\},}$$

và ta gọi $\int_E f d\mu$ là *tích phân Lebesgue* của f trên E đối với độ đo μ. Chú ý là có thể $\int_E f d\mu = \infty$.

Chú thích 2.1.2. Một hàm số có thể có nhiều tích phân tùy vào cách chọn độ

đo.

Định lý 2.1.1. Cho $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ là một không gian đo, cho A, B, $E \in \mathfrak{M}$, $0 \le c < \infty$ và hai hàm f, $g : X \to [0, \infty]$ đo được trên $(X, \mathfrak{M})$. Khi đó ta có

(i) $\int_E f d\mu = \int_X \chi_E f d\mu$,

(ii) $\int_E f d\mu \le \int_E g d\mu$ nếu $f \le g$,

(iii) $\int_A f d\mu \le \int_B f d\mu$ nếu $A \subset B$,

(iv) $\int_E c f d\mu = c \int_E f d\mu$.

(v) $\int_E f d\mu = 0$, nếu $f(x) = 0\ \forall x \in E$, cho dù $\mu(E) = \infty$,

(vi) $\int_E f d\mu = 0$, nếu $\mu(E) = 0$, cho dù $f(x) = \infty\ \forall x \in E$.

Hướng dẫn chứng minh Định lý 2.1.1:

(i) $\int_E f d\mu = \int_X \chi_E f d\mu$.

Để cho gọn, ta ký hiệu $\mathcal{F}(f)$ = tập các hàm đơn s trên X sao cho $0 \le s \le f$.

Ta viết Định nghĩa 2.1.2. về tích phân Lebesgue của f trên E đối với độ đo μ như sau.

$$\boxed{\int_E f d\mu = \sup\left\{\int_E s d\mu \,:\, s \in \mathcal{F}(f)\right\},}$$

Trước hết ta nghiệm lại rằng (i) đúng với $f = \chi_A$, $A \in \mathfrak{M}$, và với f là hàm đơn.

* (i) đúng với $f = \chi_A$, $A \in \mathfrak{M}$: Bởi vì

$$\int_E f d\mu = \int_E \chi_A d\mu = \mu(E \cap A) = \int_X \chi_{E\cap A} d\mu = \int_X \chi_E \chi_A f d\mu = \int_X \chi_E f d\mu.$$

** (i) đúng với $f = \sum_{j=1}^m \alpha_j \chi_{A_j}$, $A_j \in \mathfrak{M}$. Bởi vì

$$\boxed{\int_X \chi_E f d\mu = \int_X \chi_E\left(\sum_{j=1}^m \alpha_j \chi_{A_j}\right) d\mu = \int_X \left(\sum_{j=1}^m \alpha_j \chi_{E\cap A_j}\right) d\mu = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(E \cap A_j) = \int_E f d\mu}$$

***$\forall s \in \mathcal{F}(f) \Rightarrow s\chi_E \in \mathcal{F}(f\chi_E)$:

$\int_E sd\mu = \int_X s\chi_E d\mu \leq \sup\left\{\int_X s\chi_E d\mu = \int_E sd\mu \,:\, s \in \mathcal{F}(f\chi_E)\right\} = \int_X \chi_E f d\mu.$

Vậy

$\int_E fd\mu \leq \int_X \chi_E fd\mu^{(1*)}$

***$\forall s \in \mathcal{F}(f\chi_E) \Rightarrow s \in \mathcal{F}(f)$:

$\int_E sd\mu \leq \sup\left\{\int_E sd\mu \,:\, s \in \mathcal{F}(f)\right\} = \int_E fd\mu.$

Vậy

$\int_X \chi_E fd\mu \leq \int_E fd\mu^{(2*)}$

Từ $^{(1*)}$ và $^{(2*)}$, ta suy ra (i) đúng.

(ii) $\int_E fd\mu \leq \int_E gd\mu$ nếu $f \leq g$. Điều nầy dễ thấy vì $\mathcal{F}(f) \subset \mathcal{F}(g)$.

(iii) $\int_A fd\mu \leq \int_B fd\mu$ nếu $A \subset B$,

Chú ý rằng nếu $A \subset B$, thì $\chi_A f \leq \chi_B f$, do đó

$\int_A fd\mu = \int_X \chi_A fd\mu \leq \int_X \chi_B fd\mu = \int_B fd\mu.$

(iv) $\int_E cfd\mu = c\int_E fd\mu$. Nếu $c = 0$ thì hiển nhiên. Giả sử $c > 0$.

$\int_E cfd\mu = \sup\left\{\int_E sd\mu \,:\, s \in \mathcal{F}(cf)\right\} = \sup\left\{\int_E sd\mu \,:\, \frac{s}{c} \in \mathcal{F}(f)\right\}$
$= \sup\left\{c\int_E rd\mu \,:\, r = \frac{s}{c} \in \mathcal{F}(f)\right\} = c\sup\left\{\int_E rd\mu \,:\, r \in \mathcal{F}(f)\right\} = c\int_E fd\mu.$

(v) $\int_E fd\mu = 0,$ nếu $f(x) = 0\ \forall x \in E,$ cho dù $\mu(E) = \infty.$ Dùng (iv).

(vi) $\int_E fd\mu = 0,$ nếu $\mu(E) = 0,$ cho dù $f(x) = \infty\ \forall x \in E.$ Từ định nghĩa.

Định lý 2.1.2 (**Định lý hội tụ đơn điệu Lebesgue**). Cho $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ là một không gian đo, và $\{f_m\}$ là dãy hàm đo được từ X và $[0, \infty]$, và giả sử rằng

(i) $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \leq f_m(x) \leq \ldots \leq \infty \quad \forall x \in X,$

(ii) $\lim\limits_{m\to\infty} f_m(x) = f(x)\ \forall x \in X.$

Khi đó ta có f đo được và

$$\boxed{\lim_{m\to\infty} \int_X f_m d\mu = \int_X fd\mu.}$$

Hướng dẫn chứng minh Định lý 2.1.2:

Vì $\int_X f_m d\mu \leq \int_X f_{m+1} d\mu$, tồn tại $\alpha \in [0, \infty]$, sao cho

(1) $\lim\limits_{m\to\infty} \int_X f_m d\mu = \alpha.$

Theo ví dụ 1.2.9, thì $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ là hàm đo được. Vì $f_m(x) \le f(x)$, nên ta có $\int_X f_m d\mu \le \int_X f d\mu$ với mọi m, do đó theo (1), ta có

(2) $\alpha \le \int_X f d\mu.$

Để chứng minh $\alpha \ge \int_E f d\mu$, ta chỉ cần chứng minh rằng

(3) $c\int_X s d\mu \le \alpha,\ \forall s \in \mathcal{F}(f),\ \forall c \in (0,1).$

Cho $s = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{A_j} \in \mathcal{F}(f),\ c \in (0,1).$

Ta đặt

(4) $E_n = \{x \in X : f_n(x) \ge cs(x)\},\ n \in \mathbb{N}.$

Chú ý rằng mỗi E_n đo được, $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \ldots$, và $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Để thấy đẳng thức nầy, ta xét $x \in X$.

Nếu $f(x) = 0$, thì $x \in E_1$.

Nếu $f(x) > 0$, thì $cs(x) < f(x)$, vì $0 < c < 1$. Do đó $x \in E_n$ với một n nào đó. Vậy

(5) $\int_X f_n d\mu \ge \int_{E_n} f_n d\mu \ge c\int_{E_n} s d\mu = c\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mu(E_n \cap A_j)$

Sử dụng ví dụ 1.17, áp dụng cho dãy $\{E_n \cap A_j\}$:

$$E_1 \cap A_j \subset E_2 \cap A_j \subset E_3 \cap A_j \ldots, \text{ và } X \cap A_j = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \cap A_j = A_j,$$

ta có

(6) $\mu(A_j) = \mu(X \cap A_j) = \mu(\cup_{n=1}^{\infty} (E_n \cap A_j)) = \lim_{n\to+\infty} \mu(E_n \cap A_j).$

Vậy

(7) $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mu(E_n \cap A_j) \to \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mu(A_j) = \int_X s d\mu.$

Vậy, cho $n \to \infty$, ta suy từ (1), (5), (7) rằng

(8) $\alpha \ge c\int_X s d\mu.$ Cho $c \to 1_-$, ta có $\alpha \ge \int_X s d\mu.$

Sau đó lấy Sup trên $s \in \mathcal{F}(f)$, ta có

(9) $\boxed{\int_E f d\mu = \sup\left\{\int_E s d\mu : s \in \mathcal{F}(f)\right\} \le \alpha.}$

(2) – (9)$\Rightarrow$ $\alpha = \int_X f d\mu.$

Định lý 2.1.3 (**Bổ đề Fatou**). Cho $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ là một không gian đo, $E \in \mathfrak{M}$ và $\{f_m\}$ là dãy hàm đo được từ X và $[0,\infty]$. Khi đó ta có

$$\boxed{\int_E \liminf_{m\to\infty} f_m d\mu \le \liminf_{m\to\infty} \int_E f_m d\mu.}$$

Hướng dẫn chứng minh Định lý 2.1.3 (**Bổ đề Fatou**).

Đặt

(1) $\boxed{g_k(x) = \inf_{m \geq k} f_m(x),\ (k = 1,2,3,\ldots, x \in X)}$

Khi đó, $g_k(x) \leq f_k(x)$, do đó

(2) $\boxed{\int_E g_k d\mu \leq \int_E f_k d\mu,\ (k = 1,2,3,\ldots)}$

Mặt khác, $0 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq \ldots,$ mỗi g_k là đo được, và $g_k(x) \to \liminf_{m\to\infty} f_m(x)$, khi $k \to \infty$. Dùng định lý hội tụ đơn điệu 2.12, ta có

(3) $\boxed{\lim_{k\to\infty} \int_E g_k d\mu = \int_E \liminf_{m\to\infty} f_m(x) d\mu.}$

Từ (2), ta có

(4) $\boxed{\lim_{k\to\infty} \int_E g_k d\mu = \liminf_{k\to\infty} \int_E g_k d\mu = \sup_m \inf_{k\geq m} \int_E g_k d\mu \leq \sup_m \inf_{k\geq m} \int_E f_k d\mu = \liminf_{k\to\infty} \int_E f_k d\mu.}$

Từ (3), (4) dẫn đến $\boxed{\int_E \liminf_{m\to\infty} f_m d\mu \leq \liminf \int_E f_m d\mu.}$

2. HÀM KHẢ TÍCH LEBESGUE

Định nghĩa 2.2.1. Cho $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ là một không gian đo, ở đây μ là một độ đo dương trên X. Ta ký hiệu $\mathcal{L}(X,\mu)$ là tập tất cả các hàm đo được $f : X \to \mathbb{C}$ sao cho

$$\int_X |f| d\mu < \infty.$$

Một hàm $f \in \mathcal{L}(X,\mu)$ gọi là *hàm khả tích Lebesgue tr*ên X *theo độ đo* μ. Chú ý rằng tính đo được của f dẫn đến tính đo được của $|f|$ (môđun của f), do đó $\int_X |f| d\mu$ được xác định.

Nếu chỉ xét một độ đo μ, không sợ nhầm lẫn, ta có thể ký hiệu cho gọn lại $\mathcal{L}(X,\mu) = \mathcal{L}(X)$. Nếu $f = u + iv$, trong đó u, v là các hàm thực đo được trên X, và nếu $f \in \mathcal{L}(X)$, ta định nghĩa

$$\boxed{\int_E f d\mu = \int_E u^+ d\mu - \int_E u^- d\mu + i\int_E v^+ d\mu - i\int_E v^- d\mu,} \quad (*)$$

với mỗi tập $E \in \mathfrak{M}$.

Ở đây u^+ và u^- lần lượt là các phần dương và phần âm của $u = u^+ - u^-$. Công thức tường minh có thể viết $u^+ = \max\{0,u\} = \frac{1}{2}(|u| + u)$, và $u^- = \min\{0,u\} = \frac{1}{2}(|u| - u)$. Một cách tương tự v^+ và v^- cũng thu được từ v. Cũng chú ý rằng 4 tích phân trong (*) tồn tại như trong định nghĩa 2.1.2. Hơn nữa, ta có $u^+ \leq |u| \leq |f|$,... Như vậy cả 4 tích phân trong (*) là hữu hạn. Vậy (*) xác định và tích phân $\int_E f d\mu \in \mathbb{C}$.

Trong trường hợp hàm $f: X \to [-\infty, \infty]$ đo được trên X, cho $E \in \mathfrak{M}$. Ta định nghĩa $\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$ nếu ít nhất một trong 2 tích phân $\int_E f^+ d\mu$, $\int_E f^- d\mu$ là hữu hạn. Như vậy tích phân $\int_E f d\mu \in [-\infty, \infty]$.

Định lý 2.2.1. Cho $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ là một không gian đo, cho f và $g \in \mathcal{L}(X, \mu)$ và $\alpha \in \mathbb{C}$. Khi đó $f + g$, $\alpha f \in \mathcal{L}(X, \mu)$ và ta có

$$\boxed{\begin{aligned} &\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu, \\ &\int_X \alpha f d\mu = \alpha \int_X f d\mu. \end{aligned}}$$

Hướng dẫn chứng minh Định lý 2.2.1.

a/ Xét f và g đo được không âm.

Chọn hai dãy tăng các hàm đơn $\{s_m^{(1)}\}$, $\{s_m^{(2)}\}$, sao cho $s_m^{(1)} \uparrow f$ và $s_m^{(2)} \uparrow g$. Khi đó $s_m^{(1)} + s_m^{(2)} \uparrow f + g$.

Từ đẳng thức

(1) $\boxed{\int_X \left(s_m^{(1)} + s_m^{(2)}\right) d\mu = \int_X s_m^{(1)} d\mu + \int_X s_m^{(2)} d\mu,}$

ta sử dụng định lý hội tụ đơn điệu 2.12, ta có

(2)
$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{k\to\infty} \int_X s_m^{(1)} d\mu = \int_X f d\mu. \\ &\lim_{k\to\infty} \int_X s_m^{(2)} d\mu = \int_X g d\mu. \\ &\int_X (f+g) d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X \left(s_m^{(1)} + s_m^{(2)}\right) d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X s_m^{(1)} d\mu + \lim_{k\to\infty} \int_X s_m^{(2)} d\mu \\ &\qquad = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu. \end{aligned}}$$

b/ Xét f và g là các hàm thực đo được. Đặt $h = f + g$, ta có

(3) $h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$.

Do đó

(4) $h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$

Áp dụng tích phân cho tổng các hàm không âm

(5) $\int_X h^+ d\mu + \int_X f^- d\mu + \int_X g^- d\mu = \int_X h^- d\mu + \int_X f^+ d\mu + \int_X g^+ d\mu$

hay

(6) $$\underbrace{\int_X h^+ d\mu - \int_X h^- d\mu}_{\int_X h d\mu} = \underbrace{\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu}_{\int_X f d\mu} + \underbrace{\int_X g^+ d\mu - \int_X g^- d\mu}_{\int_X g d\mu}$$

c/ Xét f và g là các hàm phức đo được. $f = u + iv$, $g = w + iz$. Đặt $h = f + g$, ta có

(7) $h = \operatorname{Re} h + i \operatorname{Im} h = u + w + i(v + z)$

(8)
$$\begin{aligned}
\int_X h d\mu &= \int_X (\operatorname{Re} h) d\mu + i \int_X (\operatorname{Im} h) d\mu = \int_X (u + w) d\mu + i \int_X (v + z) d\mu \\
&= \int_X u d\mu + \int_X w d\mu + i\left(\int_X v d\mu + \int_X z d\mu\right) \\
&= \underbrace{\int_X u d\mu + i \int_X v d\mu}_{\int_X f d\mu} + \underbrace{\int_X w d\mu + i \int_X z d\mu}_{\int_X g d\mu}
\end{aligned}$$

Định lý 2.2.2. Cho $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ là một không gian đo, cho $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$. Khi đó

$$\left|\int_X f d\mu\right| \le \int_X |f| \, d\mu.$$

Hướng dẫn chứng minh Định lý 2.2.2

Đặt $Z = \int_X f d\mu$ Do $Z \in \mathbb{C}$, nên tồn tại $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$ sao cho $\alpha Z = |Z|$. Đặt $u = \operatorname{Re}(\alpha f)$. Khi đó $u \le |\alpha f| = |f|$. Do đó

$$\left|\int_X f d\mu\right| = |Z| = \alpha Z = \alpha \int_X f \, d\mu = \int_X \alpha f \, d\mu = \int_X u \, d\mu \le \int_X |f| \, d\mu.$$

Chú ý rằng $\int_X \alpha f \, d\mu$ là số thực.

Định lý 2.2.3 (**Định lý hội tụ bị chặn Lebesgue**). Cho $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ là một không gian đo, và $\{f_m\}$ là dãy hàm phức đo được từ X sao cho

(i) $f(x) = \lim_{m \to \infty} f_m(x)$ tồn tại $\forall x \in X$.

Nếu tồn tại $g \in \mathcal{L}(X, \mu)$ sao cho

(ii) $|f_m(x)| \le g(x) \quad \forall m = 1, 2, \ldots; \quad \forall x \in X$.

Khi đó

$$\boxed{f \in \mathcal{L}(X, \mu), \ \lim_{m \to \infty} \int_X |f_m - f| d\mu = 0 \text{ và } \lim_{m \to \infty} \int_X f_m d\mu = \int_X f d\mu.}$$

Hướng dẫn chứng minh Định lý 2.2.3

Do $|f(x)| \le g(x)$ và f đo được, $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$. Vì $|f_m(x) - f(x)| \le 2g(x)$, ta áp dụng Bổ đề Fatou (Định lý 2.1.3) cho hàm $2g(x) - |f_m(x) - f(x)|$ và dẫn đến

(1)
$$\begin{aligned}
\int_X 2g d\mu &\le \liminf \int_X (2g - |f_m - f|) d\mu \\
&= \int_X 2g d\mu + \liminf_{m \to \infty} \left(-\int_X |f_m - f| d\mu\right) \\
&= \int_X 2g d\mu - \limsup_{m \to \infty} \int_X |f_m - f| d\mu.
\end{aligned}$$

Vì $\int_X 2g d\mu$ hữu hạn nên, $\limsup_{m\to\infty} \int_X |f_m - f| d\mu \le 0$. Điều nầy dẫn đến tồn tại $\lim_{m\to\infty} \int_X |f_m - f| d\mu$ và $= 0$. Mà điều nầy dẫn đến $\lim_{m\to\infty} \int_X f_m d\mu = \int_X f d\mu$, bởi vì

$$\boxed{\left|\int_X f_m d\mu - \int_X f d\mu\right| = \left|\int_X (f_m - f) d\mu\right| \le \int_X |f_m - f| d\mu \to 0.}$$

Định nghĩa 2.2.2. Cho $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ là một không gian đo, với μ là một độ đo dương trên X và $E \in \mathfrak{M}$. Ta xét một họ tính chất $P = \{P(x) : x \in E\}$. Ta nói P *đúng hầu hết trên* E (theo độ đo μ) nếu tồn tại một tập $N \in \mathfrak{M}$ sao cho $N \subset E$, $\mu(N) = 0$, và $P(x)$ đúng $\forall x \in E \setminus N$. Ta còn viết " P *đúng h.h. trên* E ", hay " P *đúng a.e. trên* E " (almost everywhere). Khái niệm *hầu hết* phụ thuộc vào độ đo cho trước và để cho rõ ta sẽ viết " P *đúng h.h.*$[\mu]$ *trên* E ", hay " P *đúng a.e.* $[\mu]$ *trên* E ".

Ví dụ như, nếu hai hàm f và g đo được trên X và nếu $\mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0$, thì ta nói rằng $f = g$ *h.h.* $[\mu]$ *trên* X.

Cho $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ là một không gian đo, với μ là một độ đo dương trên X. Khi đó $\mathcal{L}(X, \mu)$ là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$ đối với phép cộng và nhân thông thường. Cho f và $g \in \mathcal{L}(X, \mu)$, ta ký hiệu $f \sim g$ nếu $f = g$ h.h. $[\mu]$ trên X. Có thể kiểm tra được rằng $\sim$ là một quan hệ tương đương trên $\mathcal{L}(X, \mu)$.

Ta cũng chú ý rằng nếu $f \sim g$, khi đó với mọi $E \in \mathfrak{M}$, ta có $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$.

Để thấy điều nầy, ta phân tích $E = (E \setminus N) \cup (E \cap N)$ thành hội của hai tập rời nhau $E \setminus N$ và $E \cap N$, với $N = \{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$; $f = g$, trên $E \setminus N$ và $\mu(E \cap N) = 0$.

Định nghĩa 2.2.3. Ta ký hiệu $L^1(X, \mu) = \mathcal{L}(X, \mu) / \sim$ là tập thương (tức tập các lớp tương đương trên $\mathcal{L}(X, \mu)$ đối với quan hệ tương đương $\sim$). Khi đó $L^1(X, \mu)$ cũng là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$ đối với phép cộng và nhân như sau:

$$\widetilde{f} + \widetilde{g} = \widetilde{f+g} \text{ và } \alpha\widetilde{f} = \widetilde{\alpha f}, \quad \forall f, g \in \mathcal{L}(X, \mu), \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Nếu không sợ nhầm lẫn, ta có thể ký hiệu cho gọn lại $L^1(X, \mu) = L^1(X)$. Trên $L^1(X)$ ta xác định một chuẩn

$$\|f\| = \int_X |f| \, d\mu \quad \forall f \in L^1(X).$$

Định lý 2.2.4. $(L^1(X, \mu), \|\cdot\|)$ là một không gian Banach.

Chứng minh Định lý 2.2.4 như bài tập

===========================

Ví dụ 2.2.1. (Xem như bài tập). Cho $f : X \to [0, \infty]$ và $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$. Chứng minh rằng $\mu(\{x \in X : f(x) = \infty\}) = 0$.

Hướng dẫn: (Xem như bài tập).

Đặt $A_n = \{x \in X : f(x) > n\}$.

Khi đó $A_n \in \mathfrak{M}$, $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ và $\{x \in X : f(x) = \infty\} = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Mặt khác

$$\mu(A_n) = \frac{1}{n}\int_X n\chi_{A_n} d\mu \ \le \frac{1}{n}\int_X \chi_{A_n} f d\mu \le \frac{1}{n}\int_X f\, d\mu \to 0.$$

Khi đó, áp dụng ví dụ 1.1.8, ta có $\mu(\{x \in X : f(x) = \infty\}) = \mu(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

Ví dụ 2.2.2. (Xem như bài tập). Cho $f : X \to [-\infty, \infty]$ và $f \in \mathcal{L}(X,\mu)$. Chứng minh rằng $\mu(\{x \in X : |f(x)| = \infty\}) = 0$.

Hướng dẫn: Dùng bài tập trên với f thay bởi $|f|$.

Ví dụ 2.2.3. (Xem như bài tập). Cho $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ là một không gian đo với độ đo dương μ.

(a) Giả sử $f : X \to [0,\infty]$ đo được, $E \in \mathfrak{M}$ và $\int_E f d\mu = 0$. Chứng minh rằng $f = 0$ a.e. trên E.

(b) Giả sử $f \in \mathcal{L}(X,\mu)$ và $\int_E f d\mu = 0\ \forall E \in \mathfrak{M}$. Chứng minh rằng $f = 0$ a.e. trên X.

(c) Giả sử $f \in \mathcal{L}(X,\mu)$ và $\left|\int_X f d\mu\right| = \int_X |f| d\mu$. Chứng minh rằng tồn tại một hằng số α sao cho $\alpha f = |f|$ a.e. trên X.

Hướng dẫn chứng minh Ví dụ 2.2.3.

(a) Đặt $A_n = \{x \in E : f(x) > \frac{1}{n}\}$. Khi đó $\{x \in E : f(x) > 0\} = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$.

$$\frac{1}{n}\mu(A_n) = \frac{1}{n}\int_X \chi_{A_n} d\mu \ \le \int_{A_n} \chi_{A_n} f d\mu \le \int_{A_n} f d\mu \le \int_E f d\mu = 0.$$

Vậy, ta có $\mu(A_n) = 0$. Vì $\{x \in E : f(x) > 0\} = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, ta có $\mu(\{x \in E : f(x) > 0\}) = \mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \le \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) = 0$. Vậy $f = 0$ a.e. trên E.

(b) Đặt $f = u + iv$, và $E = \{x \in X : u(x) \ge 0\}$. Khi đó

$$\int_E f d\mu = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\int_E f d\mu = \int_E u d\mu = 0 \text{ và } \mathrm{Im}\int_E f d\mu = \int_E v d\mu = 0.$$

Đặc biệt, $\mathrm{Re}\int_E f d\mu = \int_E u d\mu = \int_E u^+ d\mu = 0$. Do đó từ (a), ta có $u^+ = 0$ a.e. trên E. Do đó $u^+ = 0$ a.e. trên X. (Vì $X \setminus E = \{x \in X : u(x) < 0\} = \{x \in X : u^+(x) = 0\}$). Tương tự ta cũng có

$$u^- = v^+ = v^- = 0 \text{ a.e. trên } X.$$

(c) (i) Nếu $\alpha f = |f|$ a.e. trên X, $\alpha \in \mathbb{C}$, thì $|\alpha| = 1$ và

$$\int_X |f| d\mu = \int_X \alpha f d\mu = \mathrm{Re}\int_X \alpha f d\mu = \left|\int_X \alpha f d\mu\right| = |\alpha|\left|\int_X f d\mu\right| = \left|\int_X f d\mu\right|.$$

(ii) Đặt $Z = \int_X f d\mu$. Chú ý là $Z \in \mathbb{C}$, nên tồn tại $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$ sao cho $\alpha Z = |Z|$. Đặt $U = \mathrm{Re}(\alpha f)$. Khi đó $U \le |\alpha f| = |f|$. Do đó

$$\left|\int_X f d\mu\right| = |Z| = \alpha Z = \alpha\int_X f\, d\mu = \int_X \alpha f\, d\mu$$
$$= \mathrm{Re}\int_X \alpha f\, d\mu = \int_X \mathrm{Re}(\alpha f) d\mu = \int_X U\, d\mu \le \int_X |f|\, d\mu.$$

(Chú ý rằng $\int_X \alpha f\, d\mu$ là số thực). Vậy

$$\left|\int_X f d\mu\right| = \int_X |f| d\mu \Leftrightarrow \int_X U\, d\mu = \int_X |f| d\mu \Leftrightarrow \int_X (|f| - U) d\mu = 0.$$

Vì $|f| - U \geq 0$, nên (a) chứng tỏ rằng $|f| - U = 0$ a.e. trên X. Điều nầy nói rằng $\mathrm{Re}(\alpha f) = U = |f| = |\alpha f|$ a.e. trên X. Do đó $\mathrm{Im}(\alpha f) = 0$ a.e. trên X. Vậy $\alpha f = |\alpha f| = |f|$ a.e. trên X.

Định lý 2.2.5. Cho $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ là một không gian đo, và $\{f_m\}$ là dãy hàm phức đo được xác định a.e. trên X sao cho

(i) $\sum_{m=1}^{\infty} \int_X |f_m| d\mu < \infty$.

Khi đó chuỗi hàm

(ii) $f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(x)$ hội tụ a.e. trên X, $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$, và

(iii) $\int_X f d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \int_X f_m d\mu$.

Hướng dẫn chứng minh Định lý 2.2.5. Đặt $S_m = \{x \in X : f_m(x)$ xác định$\}$. Ta có $\mu(X \setminus S_m) = 0$. Đặt $\Phi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} |f_m(x)|$, với $x \in S = \cap_{m=1}^{\infty} S_m$. Khi đó $\mu(X \setminus S) = \mu(X \setminus \cap_{m=1}^{\infty} S_m) = \mu(\cup_{m=1}^{\infty} (X \setminus S_m)) = 0$. Do (i), và sử dụng định lý hội tụ đơn điệu với

$$\Phi_N(x) = \sum_{m=1}^{N} |f_m(x)| \nearrow \Phi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} |f_m(x)| \text{ với } x \in S = \cap_{m=1}^{\infty} S_m.$$

ta có

$$(1) \quad \begin{aligned} \int_S \Phi d\mu &= \lim_{N\to\infty} \int_S \Phi_N d\mu = \lim_{N\to\infty} \int_S \sum_{m=1}^{N} |f_m(x)| d\mu \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{N} \int_S |f_m(x)| d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \int_S |f_m| d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \int_X |f_m| d\mu < \infty. \end{aligned}$$

Nếu $E = \{x \in S : X : \Phi(x) < \infty\}$, ta suy ra rằng (Xem **Ví dụ 2.2.2**), $\mu(X \setminus E) = 0$. Chuỗi hàm (ii) hội tụ tuyệt đối tại mỗi $x \in E$, và nếu $f(x)$ được xác định bởi (ii) với $x \in E$, thì $|f(x)| \leq \Phi(x)$ trên E, do (1), ta có $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$. Nếu $G_N(x) = \sum_{m=1}^{N} f_m(x)$, khi đó $|G_N| \leq \Phi$, $G_N(x) \to f(x)$ với mọi $x \in E$, và do Định lý 2.2.3 (Định lý hội tụ bị chặn Lebesgue), ta có

$$(2) \quad \int_E f d\mu = \lim_{N\to\infty} \int_E G_N d\mu = \lim_{N\to\infty} \int_E \sum_{m=1}^{N} f_m(x) d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \int_E f_m d\mu.$$

(2) **suy ra** (**iii**), **b**ởi vì $\mu(X \setminus E) = 0$.

Bài tập (**Định lý 2.2.6**). Cho $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ là một không gian đo. Cho $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$ và $\{f_m\} \subset \mathcal{L}(X, \mu)$ sao cho

$$\boxed{\lim_{m\to\infty} \int_X |f_m - f| d\mu = 0.}$$

Chứng minh rằng tồn tại một dãy con $\{f_{m_k}\}$ của $\{f_m\}$ và tồn tại $g \in \mathcal{L}(X, \mu)$ sao cho là dãy hàm phức đo được xác định a.e. trên X sao cho

(i) $|f_{m_k}(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in X, \forall k \in \mathbb{N}$,

(ii) $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{m_k}(x)$ a.e. trên X.

Hướng dẫn chứng minh Định lý 2.2.6.

Do $\lim_{m\to\infty}\int_X |f_m - f|d\mu = 0$, ta có một dãy con $\{f_{m_k}\}$ của $\{f_m\}$ sao cho

$$\boxed{\int_X |f_{m_{k+1}} - f_{m_k}|d\mu \le \frac{1}{2^k},\ \ \forall k \in \mathbb{N}.}$$

Đặt $F_1 = f_{m_1}$, $F_k = f_{m_k} - f_{m_{k-1}}$, $k \ge 2$ và $g = \sum_{k=1}^{\infty}|F_k|$.

Ta có

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\int_X |F_k|d\mu &= \int_X |F_1|d\mu + \sum_{k=2}^{\infty}\int_X |F_k|d\mu \\ &= \int_X |f_{m_1}|d\mu + \sum_{k=2}^{\infty}\int_X |f_{m_k} - f_{m_{k-1}}|d\mu \\ &\le \int_X |f_{m_1}|d\mu + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}} = \int_X |f_{m_1}|d\mu + 1 < \infty.\end{aligned} \tag{i}$$

Áp dụng định lý 2.25, ta có chuỗi hàm

(ii) $\widetilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(x) = \lim_{k\to\infty} f_{m_k}(x)$ hội tụ a.e. trên X, $\widetilde{f} \in \mathcal{L}(X,\mu)$.

Mặt khác, và

$$\begin{aligned}|f_{m_k}(x)| &= \left|\sum_{j=1}^{k} F_j(x)\right| \le \sum_{j=1}^{k}|F_j(x)| \\ &\le \sum_{j=1}^{\infty}|F_j(x)| = g(x)\ \ \forall x \in X,\ \forall k \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Áp dụng định lý hội tụ bị chặn Lebesgue, ta có

$$\boxed{\widetilde{f} \in \mathcal{L}(X,\mu),\ \lim_{k\to\infty}\int_X \left|f_{m_k} - \widetilde{f}\right|d\mu = 0.}$$

Cũng do $\lim_{m\to\infty}\int_X |f_m - f|d\mu = 0$, ta suy ra $\widetilde{f} = f$ a.e. trên X.

Bài tập (**Định lý Egoroff**). Cho $(X,\mathfrak{M},\mu)$ là một không gian đo với một độ do dương μ sao cho $\mu(X) < +\infty$. Cho $\{f_m\}$ dãy các hàm đo được trên X và hội tụ hầu hết về f trên X. Cho $\varepsilon > 0$, tồn tại $A \in \mathfrak{M}$, với $\mu(X \setminus A) < \varepsilon$ sao cho $\{f_m\}$ hội tụ đều trên A.

Ý tưởng Định lý Egoroff là sự hội tụ hầu hết trên tập có độ đo hữu hạn sẽ điều chỉnh thành hội tụ đều sau khi bo qua một tập có độ đo nhỏ tùy ý.

Hướng dẫn chứng minh Định lý Egoroff. Ta giả sử rằng dãy hàm $\{f_m\}$ hội tụ từng điểm về f trên X.

Đặt

$$S(n,k) = \bigcap_{i=n}^{\infty}\{x \in X : |f_i(x) - f(x)| < \tfrac{1}{k}\}.$$

Cho $x \in X$, và $k \in \mathbb{N}$, do $\{f_m\}$ hội tụ từng điểm về f trên X, ta có $n \in \mathbb{N}$, sao cho $x \in S(n,k)$. Do đó với mọi $k \in \mathbb{N}$, ta có

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} S(n,k).$$

Chú ý rằng $S(1,k) \subset S(2,k) \subset S(3,k) \subset \cdots$ Áp dụng Ví dụ 1.1.7, ta có

$\mu(X) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(S(n,k))$. Vậy với mọi $\varepsilon > 0$ và $k \in \mathbb{N}$, ta có $n_k \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\mu(X \setminus S(n,k)) = \mu(X) - \mu(S(n,k)) < \tfrac{\varepsilon}{2^k}.$$

Ta đặt $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} S(n_k, k)$.

Ta có $X \setminus A = \bigcup_{k=1}^{\infty} (X \setminus S(n_k, k))$, do đó

$$\mu(X \setminus A) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X \setminus S(n_k, k)) < \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Dễ thấy rằng $\{f_m\}$ hội tụ đều về f trên A. Thật vậy, với mọi $k \in \mathbb{N}$:

Với mọi $x \in A \Rightarrow x \in S(n_k, k) \Rightarrow |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{k}, \forall i \ge n_k$.

Chương 3. ĐỘ ĐO DƯƠNG THÔNG DỤNG

1. ĐỘ ĐO LEBESGUE TRÊN $\mathbb{R}$

Định nghĩa 3.1.1. Gọi $\mathcal{F}$ là họ tất cả các phần hội của một số hữu hạn của các tập có dạng: $(a,b]$, $(-\infty,c]$, (d,∞), $(-\infty,\infty)$, với a, b, c, $d \in \mathbb{R}$. Khi đó ta có

Định lý 3.1.1. $\mathcal{F}$ có các tính chất sau

(i) $\phi, \mathbb{R} \in \mathcal{F}$,

(ii) Nếu $E \in \mathcal{F}$, thì $\mathbb{R} \setminus E \in \mathcal{F}$,

(iii) Nếu $E_j \in \mathcal{F}, j = 1,2,\ldots,m$ thì $\cup_{j=1}^m E_j \in \mathcal{F}$.

Chú ý: $\mathcal{F}$ chưa phải là một σ –đại số.

Định nghĩa 3.1.2. Cho $E \in \mathcal{F}$. Khi đó E là hội hữu hạn các tập rời nhau có dạng: $(a,b]$, $(-\infty,c]$, (d,∞), $(-\infty,\infty)$, với a, b, c, $d \in \mathbb{R}$. Ta định nghĩa độ dài của E là tổng các độ dài các tập tương ứng trong phần hội đó và ký hiệu là $l(E)$. Hiển nhiên $l(E) \in [0,\infty]$.

Định lý 3.1.2. l có các tính chất sau

(i) $l(\phi) = 0$,

(ii) $l(E) \geq 0, \forall E \in \mathcal{F}$,

(iii) nếu $E_j \in \mathcal{F}, j \in \mathbb{N}, E_i \cap E_j = \phi, \forall i \neq j$, và nếu $\cup_{j=1}^\infty E_j \in \mathcal{F}$, thì $l(\cup_{j=1}^\infty E_j)$ $= \sum_{j=1}^\infty l(E_j)$.

Hướng dẫn chứng minh Định lý 3.1.2. Khẳng định (i), (ii) là hiển nhiên đúng. Ta chỉ cần kiểm tra khẳng định (iii): Nếu E_i có dạng $(-\infty,c]$ hoặc (d,∞) hoặc $(-\infty,\infty)$ thì (iii) là hiển nhiên đúng. Ta chỉ cần xét $E = \cup_{j=1}^m (a_j,b_j]$, đưa bài toán về dạng $E = (\alpha,\beta]$ và $E_j = (\alpha_j,\beta_j]$, tức là nếu $(\alpha,\beta] = \cup_{j=1}^\infty (\alpha_j,\beta_j]$ và $(\alpha_j,\beta_j]$ rời nhau, ta cần chứng minh rằng $\beta - \alpha = \sum_{j=1}^\infty (\beta_j - \alpha_j)$.

* Ta chú ý rằng $\cup_{j=1}^m (\alpha_j,\beta_j] \subset (\alpha,\beta]$, do đó $\beta - \alpha \geq \sum_{j=1}^m (\beta_j - \alpha_j)$.

* Cho $\varepsilon > 0$, $0 < \varepsilon < \beta - \alpha$. Khi đó $[\alpha + \varepsilon, \beta] \subset \cup_{j=1}^\infty (\alpha_j - \frac{\varepsilon}{2^j}, \beta_j + \frac{\varepsilon}{2^j})$.

[Mọi bao phủ mở của một tập con đóng và bị chặn của $\mathbb{R}$ đều có bao phủ con hữu hạn$^{(*)}$ (Xem chú thích dưới đây: **CHÚ THÍCH**: Giả sử $A \subset \mathbb{R}$ là tập con đóng và bị chặn và $\{O_j\}_{j\in J}$ là một họ các tập mở trong $\mathbb{R}$ sao cho $A \subset \cup_{j\in J} O_j$. (Ta gọi $O_j\}_{j\in J}$ là một phủ mở của A). Khi đó tồn tại một tập con hữu hạn $K \subset J$ sao cho $A \subset \cup_{j\in K} O_j$]

Khi đó, tồn tại một số hữu hạn các khoảng mở $(\alpha_{j_k} - \frac{\varepsilon}{2^{j_k}}, \beta_{j_k} + \frac{\varepsilon}{2^{j_k}})$, $k = 1,2,\cdots,N$, sao cho

$$[\alpha+\varepsilon,\beta] \subset \cup_{k=1}^{N} (\alpha_{j_k} - \tfrac{\varepsilon}{2^{j_k}}, \beta_{j_k} + \tfrac{\varepsilon}{2^{j_k}}).$$

Từ ta có

$$\begin{aligned}\beta-\alpha-\varepsilon = l([\alpha+\varepsilon,\beta]) &\subset l\Big(\cup_{k=1}^{N} (\alpha_{j_k} - \tfrac{\varepsilon}{2^{j_k}}, \beta_{j_k} + \tfrac{\varepsilon}{2^{j_k}})\Big)\\ &\le \textstyle\sum_{k=1}^{N} l\Big((\alpha_{j_k} - \tfrac{\varepsilon}{2^{j_k}}, \beta_{j_k} + \tfrac{\varepsilon}{2^{j_k}})\Big) = \sum_{k=1}^{N}\Big(\beta_{j_k} - \alpha_{j_k} + \tfrac{2\varepsilon}{2^{j_k}}\Big)\\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{N}(\beta_{j_k} - \alpha_{j_k}) + 2\varepsilon\sum_{k=1}^{N}\tfrac{1}{2^{j_k}} \le \sum_{j=1}^{\infty}(\beta_j-\alpha_j) + 2\varepsilon\sum_{j=1}^{\infty}\tfrac{1}{2^j}\\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{\infty}(\beta_j-\alpha_j) + 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Do đó $\beta-\alpha \le \sum_{j=1}^{\infty}(\beta_j-\alpha_j) + 3\varepsilon,\ \forall\varepsilon \in (0,\beta-\alpha)$. Vậy $\beta-\alpha \le \sum_{j=1}^{\infty}(\beta_j-\alpha_j)$.

Ví dụ 3.1.1. (Xem như bài tập). Cho $A_j \in \mathcal{F}, j \in \mathbb{N}$, sao cho $\cup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}$. Chứng minh rằng $l(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} l(A_j)$.

Hướng dẫn: (Xem như bài tập).

Đặt $E_1 = A_1$, $E_2 = A_2 \setminus A_1$, $E_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \cdots, E_{k+1} = A_{k+1} \setminus \cup_{j=1}^{k} A_j$. Do đó ta có

$$E_j \in \mathcal{F}, j \in \mathbb{N}, E_i \cap E_j = \phi, \forall i \ne j, \cup_{j=1}^{\infty} E_j = \cup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}.$$

Dùng định lý 3.1.2, ta **c**ó

$$l(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) = l(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) = \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} l(E_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} l(A_j).$$

Định nghĩa 3.1.3. Cho $E \subset \mathbb{R}$, và đặt $\widetilde{A}(E)$ là họ các dãy $\{E_j\} \subset \mathcal{F}$ sao cho $E \subset \cup_{j=1}^{\infty} E_j$. Đặt

$$l^*(E) = \inf\Big\{\textstyle\sum_{j=1}^{\infty} l(E_j) : \{E_j\} \in \widetilde{A}(E)\Big\}.$$

Định lý 3.1.3. Cho $A, B \subset \mathbb{R}$, ta có

(i) $l^*(\phi) = 0$,

(ii) $l^*(E) \ge 0, \forall E \subset \mathbb{R}$,

(iii) $l^*(A) \le l^*(B)$, nếu $A \subset B$,

(iv) $l^*(E) = l(E), \forall E \in \mathcal{F}$,

(v) Nếu $E_j \subset \mathbb{R}, j = 1,2,\ldots$ thì $l^*(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} l^*(E_j)$.

Hướng dẫn chứng minh Định lý 3.1.3. Khẳng định (i), (ii), (iii) là hiển nhiên đúng. Ta chỉ cần kiểm tra khẳng định (iv), (v):

Kiểm tra khẳng định (iv): Cho $E \in \mathcal{F}$. Ta đặt $E_1 = E$, $E_j = \phi$, $\forall j \ge 2$. Ta có $\{E_j\} \in \widetilde{A}(E)$, do đó từ định nghĩa ta có $l^*(E) \le l(E)$. Ta chỉ cần kiểm tra bất đẳng thức ngược lại. Cho $\{F_j\} \in \widetilde{A}(E)$, ta đặt $A_j = E \cap F_j$, ta có $E \subset \cup_{j=1}^{\infty} F_j = \cup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}$. Áp dụng 3.1.1, ta có

$$l(E) \le l(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} l(A_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} l(F_j).$$

Từ định nghĩa ta có $l(E) \le l^*(E)$.

Kiểm tra khẳng định (**v**): Cho $\varepsilon > 0$. Do

$$l^*(E_j) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} l(F_k) : \{F_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \widetilde{A}(E_j)\right\}.$$

Nên với mỗi $j \in \mathbb{N}$, ta có $\{F_{j,k}\}_{k\in\mathbb{N}} \in \widetilde{A}(E_j)$, sao cho

$$\sum_{k=1}^{\infty} l(F_{j,k}) < l^*(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Ta chú ý rằng $E_j \subset \cup_{k=1}^{\infty} F_{j,k}$, do đó $\cup_{j=1}^{\infty} E_j \subset \cup_{j=1}^{\infty} \cup_{k=1}^{\infty} F_{j,k}$. Điều nầy dẫn đến $\{F_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{N}} \in \widetilde{A}(\cup_{j=1}^{\infty} E_j)$, do đó ta có

$$l^*(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) \le \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} l(F_{j,k}) \le \sum_{j=1}^{\infty}\left(l^*(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} l^*(E_j) + \varepsilon.$$

Mà điều nầy đúng với mọi $\varepsilon > 0$, nên ta có $l^*(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} l^*(E_j)$.

Định nghĩa 3.1.4. Đặt $\mathfrak{M}$ là họ các tập $E \subset \mathbb{R}$ có các tính chất sau

$(*)\quad l^*(A) = l^*(A \cap E) + l^*(A \setminus E),\ \forall A \subset \mathbb{R}.$

Chú ý 3.1.1. Do **định lý 3.1.3**, ta có

$(*) \quad \Leftrightarrow \quad l^*(A) \ge l^*(A \cap E) + l^*(A \setminus E),\ \forall A \subset \mathbb{R}.$

Định lý 3.1.4.

(i) $\mathfrak{M}$ là một σ –đại số.

(ii) Nếu $E_j \in \mathfrak{M},\ j = 1,2,\ldots\ ,\ E_i \cap E_j = \phi,\ \forall i \ne j$, thì $l^*(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} l^*(E_j)$.

Hướng dẫn chứng minh Định lý 3.1.4.

Kiểm tra khẳng định (**i**): $\mathfrak{M}$ là một σ –đại số.???

(j) $\mathbb{R} \in \mathfrak{M}$. ??. Vì $l^*(A \cap \mathbb{R}) + l^*(A \setminus \mathbb{R}) = l^*(A) + l^*(\phi) = l^*(A),\ \forall A \subset \mathbb{R}$.

(jj) $\mathbb{R} \setminus E \in \mathfrak{M},\ \forall E \in \mathfrak{M}$. ???. Vì

$$\begin{aligned} l^*(A \cap (\mathbb{R} \setminus E)) + l^*(A \setminus (\mathbb{R} \setminus E)) &= l^*(A \cap E^c) + l^*(A \setminus E^c) \\ &= l^*(A \setminus E) + l^*(A \cap E) = l^*(A),\ \forall A \subset \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(jjj) Trước hết ta kiểm tra $\forall E_1, E_2 \in \mathfrak{M} \Rightarrow E_1 \cup E_2 \in \mathfrak{M}$.??? Vì $\forall A \subset \mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned} & l^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + l^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^C) \\ &= l^*(A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_1) + l^*(A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_1^C) + l^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^C) \\ &= l^*(A \cap E_1) + l^*(A \cap E_2 \cap E_1^C) + l^*(A \cap E_1^C \cap E_2^C) \\ &= l^*(A \cap E_1) + l^*(A \cap E_1^C) = l^*(A),\ \forall A \subset \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(4j) Trước hết ta kiểm tra $\forall E_1, E_2 \in \mathfrak{M},\ E_1 \cap E_2 = \phi$, thì $l^*(E_1 \cup E_2) = l^*(E_1) + l^*(E_2)$.

Chú ý rằng $E_1 \cap E_2 = \phi \Rightarrow E_2 \subset E_1^C$,

$\forall A \subset \mathbb{R}$, ta có

$$l^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) = l^*(A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_1) + l^*(A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_1^C)$$
$$= l^*(A \cap E_1) + l^*(A \cap E_2 \cap E_1^C) = l^*(A \cap E_1) + l^*(A \cap E_2).$$

Lấy $A = \mathbb{R}$, ta có $l^*(E_1 \cup E_2) = l^*(E_1) + l^*(E_2)$.

Bằng qui nạp, ta có: Nếu $E_j \in \mathfrak{M}$, $j = 1, 2, \ldots N$, thì $\cup_{j=1}^N E_j \in \mathfrak{M}$.

Hơn nữa nếu các E_j rời nhau thì $l^*(\cup_{j=1}^N E_j) = \sum_{j=1}^N l^*(E_j)$.

(5j) Bây giờ xét $E_j \in \mathfrak{M}$, $j = 1, 2, \ldots$, $E_i \cap E_j = \phi$, $\forall i \neq j$, ta sẽ chứng minh rằng

$\cup_{j=1}^\infty E_j \in \mathfrak{M}$, và $l^*(\cup_{j=1}^\infty E_j) = \sum_{j=1}^\infty l^*(E_j)$.

Ta đặt $E = \cup_{j=1}^\infty E_j$ và $F_N = \cup_{j=1}^N E_j = F_{N-1} \cup E_N$.

Chú ý rằng $F_N \subset E \Rightarrow E^C \subset F_N^C$, $\quad l^*(A \cap F_N^C) \geq l^*(A \cap E^C)$

$\forall A \subset \mathbb{R}$, ta có

$$l^*(A) = l^*(A \cap F_N) + l^*(A \cap F_N^C) = \sum_{j=1}^N l^*(A \cap E_j) + l^*(A \cap F_N^C)$$
$$\geq \sum_{j=1}^N l^*(A \cap E_j) + l^*(A \cap E^C).$$

Do định lý 3.1.3, (v), ta có

$\forall A \subset \mathbb{R}$, ta có $l^*(A) \geq \sum_{j=1}^\infty l^*(A \cap E_j) + l^*(A \cap E^C) \geq l^*(A \cap E) + l^*(A \cap E^C)$.

Từ chú ý 3.1.1, ta suy ra $E = \cup_{j=1}^\infty E_j \in \mathfrak{M}$. Ta chọn $A = E$, khi đó $l^*(E) \geq \sum_{j=1}^\infty l^*(E_j)$ và cũng từ định lý 3.1.3, (v), ta có $l^*(E) = \sum_{j=1}^\infty l^*(E_j)$.

Định lý 3.1.5. $\mathcal{F} \subset \mathfrak{M}$.

Hướng dẫn chứng minh Định lý 3.1.5.

Cho $E \in \mathcal{F}$ và $A \subset \mathbb{R}$. Cho $\varepsilon > 0$. Do $l^*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^\infty l(F_k) : \{F_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \widetilde{A}(A)\right\}$, ta có $\{F_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \widetilde{A}(A)$, sao cho

$$\sum_{k=1}^\infty l(F_k) < l^*(A) + \varepsilon.$$

Do định lý 3.1.3, (v), ta có

Ta chú ý rằng $A \subset \cup_{k=1}^\infty F_k$, do đó

Chú ý rằng $A \cap E \subset \cup_{k=1}^\infty (F_k \cap E)$, $A \cap E^c \subset \cup_{k=1}^\infty (F_k \cap E^c)$,

$\forall A \subset \mathbb{R}$, ta có

$$l^*(A \cap E) + l^*(A \cap E^C) \leq \sum_{k=1}^\infty l^*(F_k \cap E) + \sum_{k=1}^\infty l^*(F_k \cap E^C)$$
$$= \sum_{k=1}^\infty (l(F_k \cap E) + l(F_k \cap E^C)) = \sum_{k=1}^\infty l(F_k) < l^*(A) + \varepsilon.$$

Từ chú ý 3.1.1, ta suy ra rằng $E \in \mathfrak{M}$.

Định nghĩa 3.1.5. Đặt $\mu(A) = l^*(A)$, $A \in \mathfrak{M}$. Khi đó $(\mathbb{R}, \mathfrak{M}, \mu)$ là một không gian đo và độ đo dương μ gọi là *độ đo Lebesgue trên* $\mathbb{R}$.

Định lý 3.1.6.

(i) Cho $E \in \mathfrak{M}$ và $B \subset \mathbb{R}$ sao cho $B \subset E$ và $\mu(E) = 0$. Khi đó $B \in \mathfrak{M}$.

(ii) $\mathfrak{M}$ chứa tất cả các tập mở và đóng của $\mathbb{R}$.

(iii) Với mọi $E \in \mathfrak{M}$ ta có

$$\mu(E) = \inf\left\{\mu(G) : E \subset G,\ G \text{ mở trong } \mathbb{R}\right\}.$$

(iv) Với mọi $E \in \mathfrak{M}$ ta có

$$\mu(E) = \sup\left\{\mu(K) : K \subset E,\ K \text{ compact trong } \mathbb{R}\right\}.$$

(v) Với mọi $E \in \mathfrak{M}$, và $a \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$, ta có

$$\mu(a+E) = \mu(E), \quad \mu(aE) = |a|\mu(E),$$

trong đó $a + E = \{a + x : x \in E\}$ và $aE = \{ax : x \in E\}$.

Hướng dẫn chứng minh Định lý 3.1.6.

(i) Cho $E \in \mathfrak{M}$ và $B \subset \mathbb{R}$ sao cho $B \subset E$ và $\mu(E) = 0$. Khi đó $B \in \mathfrak{M}$.??

Cho $A \subset \mathbb{R}$ tùy ý. Dùng **Định lý 3.1.3**.(iii):

$$A \cap B \subset B \subset E \Rightarrow l^*(E) \geq l^*(A \cap B),$$
$$A \setminus B \subset A \Rightarrow l^*(A) \geq l^*(A \setminus B).$$

Vậy

$$l^*(A) = l^*(E) + l^*(A) \geq l^*(A \cap B) + l^*(A \setminus B),\ \forall A \subset \mathbb{R}.$$

Do đó $B \in \mathfrak{M}$.

(ii) $\mathfrak{M}$ chứa tất cả các tập mở và đóng của $\mathbb{R}$. Ta chỉ cần kiểm tra $(a,b) \in \mathfrak{M}$.

Chú ý rằng $(a,b) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (a, b - \frac{b-a}{2^k}]$.

Do $(a, b - \frac{b-a}{2^k}] \in \mathcal{F} \subset \mathfrak{M}$. Mà $\mathfrak{M}$ là σ – đại số nên $(a,b) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (a, b - \frac{b-a}{2^k}] \in \mathfrak{M}$.

(iii) Với mọi $E \in \mathfrak{M}$ ta có $l^*(E) = \inf\left\{l^*(G) : E \subset G,\ G \text{ mở trong } \mathbb{R}\right\}$.??

(iii1): $\forall G$ mở trong $\mathbb{R}$, $E \subset G$, ta có $l^*(E) \leq l^*(G)$

$$\Rightarrow l^*(E) \leq \inf\left\{l^*(G) : E \subset G,\ G \text{ mở trong } \mathbb{R}\right\}.$$

(iii2): $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \{(a_j, b_j]\}$: $E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (a_j, b_j]$ và $\sum_{j=1}^{\infty}(b_j - a_j) < l^*(E) + \varepsilon$.

Xét $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (a_j, b_j + \frac{\varepsilon}{2^j}) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (a_j, b_j + \frac{\varepsilon}{2^j}]$, ta có

$$\begin{aligned} l^*(G) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} l^*\left((a_j, b_j + \tfrac{\varepsilon}{2^j}]\right) = \sum_{j=1}^{\infty} l^*\left((a_j, b_j + \tfrac{\varepsilon}{2^j}]\right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} l\left((a_j, b_j + \tfrac{\varepsilon}{2^j}]\right) = \sum_{j=1}^{\infty}(b_j - a_j + \tfrac{\varepsilon}{2^j}) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}(b_j - a_j) + \varepsilon < l^*(E) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Vậy $\inf\left\{l^*(G) : E \subset G,\ G \text{ mở trong } \mathbb{R}\right\} \leq l^*(G) < l^*(E) + 2\varepsilon$.

Do $\varepsilon > 0$ tuỳ ý nên

$$\inf\left\{l^*(G) \,:\, E \subset G,\, G \text{ mở trong } \mathbb{R}\right\} \le l^*(E).$$

Vậy

$$\inf\left\{l^*(G) \,:\, E \subset G,\, G \text{ mở trong } \mathbb{R}\right\} = l^*(E).$$

2. ĐỘ ĐO LEBESGUE TRÊN $\mathbb{R}^n$

Ta sẽ thiết lập *độ đo Lebesgue trên* $\mathbb{R}^n$ nhờ vào không gian đo $(\mathbb{R}, \mathfrak{M}, \mu)$ với độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}$.

Định nghĩa 3.2.1. Gọi $\mathcal{F}_n$ là họ tất cả các phần hội của một số hữu hạn của các ô có dạng:

$$E = E_1 \times \cdots \times E_n, \text{ với } E_1, \cdots, E_n \in \mathcal{F}.$$

Định lý 3.2.1. $\mathcal{F}_n$ có các tính chất sau

(i) $\phi, \mathbb{R}^n \in \mathcal{F}_n$,

(ii) Nếu $E \in \mathcal{F}_n$, thì $\mathbb{R}^n \setminus E \in \mathcal{F}_n$,

(iii) Nếu $E_j \in \mathcal{F}_n, j = 1, 2, \ldots, m$ thì $\cup_{j=1}^m E_j \in \mathcal{F}_n$.

Chú ý: $\mathcal{F}_n$ chưa phải là một σ –đại số.

Định nghĩa 3.2.2. Cho $E = \cup_{j=1}^m E_j$, với $E_j \in \mathcal{F}_n$, là những ô rời nhau:

$$E_j = E_{j,1} \times \cdots \times E_{j,n}, \text{ với } E_{j,1}, \cdots, E_{j,n} \in \mathcal{F}.$$

Ta định nghĩa thể tích của E là

$$v(E) = \sum_{j=1}^m \mu(E_{j,1}) \cdots \mu(E_{j,n}).$$

Hiển nhiên $v(E) \in [0, \infty]$.

Định lý 3.2.2. v có các tính chất sau

(i) $v(\phi) = 0$,

(ii) $v(E) \ge 0, \forall E \in \mathcal{F}_n$,

(iii) nếu $E_j \in \mathcal{F}_n, j \in \mathbb{N}, E_i \cap E_j = \phi, \forall i \neq j$, và nếu $\cup_{j=1}^\infty E_j \in \mathcal{F}_n$, thì $v(\cup_{j=1}^\infty E_j) = \sum_{j=1}^\infty v(E_j)$.

Lý luận tương tự như trên ta cũng có:

Định nghĩa 3.2.3. Cho $E \subset \mathbb{R}^n$, và đặt $\widetilde{A}_n(E)$ là họ các dãy $\{E_j\} \subset \mathcal{F}_n$ sao cho $E \subset \cup_{j=1}^\infty E_j$. Đặt

$$v^*(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^\infty v(E_j) \,:\, \{E_j\} \in \widetilde{A}_n(E)\right\}.$$

Định lý 3.2.3. Cho $A, B \subset \mathbb{R}^n$, ta có

(i) $v^*(\phi) = 0$,

(ii) $\quad \nu^*(E) \geq 0,\ \forall E \subset \mathbb{R}^n$,

(iii) $\quad \nu^*(A) \leq \nu^*(B)$, nếu $A \subset B$,

(iv) $\quad \nu^*(E) = \nu(E),\ \forall E \in \mathcal{F}_n$,

(v) $\quad$ Nếu $E_j \subset \mathbb{R}^n,\ j = 1, 2, \ldots$ thì $\nu^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \nu^*(E_j)$.

Định nghĩa 3.2.4. Đặt $\mathfrak{M}_n$ là họ các tập $E \subset \mathbb{R}^n$ có các tính chất sau

$(**)$ $\quad \nu^*(A) = \nu^*(A \cap E) + \nu^*(A \setminus E),\ \forall A \subset \mathbb{R}^n$.

Chú ý 3.2.1.Do định lý 3.2.3, ta có

$(**)$ $\iff$ $\nu^*(A) \geq \nu^*(A \cap E) + \nu^*(A \setminus E),\ \forall A \subset \mathbb{R}^n$.

Định lý 3.2.4.

(i) $\mathfrak{M}_n$ là một σ – đại số.

(ii) $\quad$ Nếu $E_j \in \mathfrak{M}_n,\ j \in \mathbb{N},\ E_i \cap E_j = \phi,\ \forall i \neq j$, thì $\nu^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu^*(E_j)$.

Định lý 3.2.5. $\mathcal{F}_n \subset \mathfrak{M}_n$.

Định nghĩa 3.2.5. Đặt $\mu_n(A) = \nu^*(A),\ A \in \mathfrak{M}_n$. Khi đó $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{M}_n, \mu_n)$ là một không gian đo và độ đo dương μ_n gọi là *độ đo Lebesgue trên* $\mathbb{R}^n$. Nếu $E \in \mathfrak{M}_n$ thì ta nói E là tập *Lebesgue đo được.*

Định lý 3.2.6.

(i) Cho $E \in \mathfrak{M}_n$ và $B \subset \mathbb{R}^n$ sao cho $B \subset E$ và $\mu_n(E) = 0$. Khi đó $B \in \mathfrak{M}_n$.

(ii) $\mathfrak{M}_n$ chứa tất cả các tập mở và đóng của $\mathbb{R}^n$.

(iii) Với mọi $E \in \mathfrak{M}_n$ ta có

$$\mu_n(E) = \inf\left\{\mu_n(G) : E \subset G,\ G \text{ mở trong } \mathbb{R}^n\right\}.$$

(iv) Với mọi $E \in \mathfrak{M}_n$ ta có

$$\mu_n(E) = \sup\left\{\mu_n(K) : K \subset E,\ K \text{ compact trong } \mathbb{R}^n\right\}.$$

(v) Với mọi $E \in \mathfrak{M}_n$, và $a \in \mathbb{R}^n,\ c \in \mathbb{R},\ c \neq 0$, ta có

$$\mu_n(a + E) = \mu_n(E), \quad \mu_n(cE) = |c|^n \mu_n(E),$$

trong đó $a + E = \{a + x : x \in E\}$ và $cE = \{cx : x \in E\}$.

Định lý 3.2.7.

(i) *Cho* E *là một tập mở của* $\mathbb{R}^n$. *Khi đó có một dãy các ô rời nhau* $\{P_j\}$, $P_j = (\alpha_{j,1}, \beta_{j,1}) \times \cdots \times (\alpha_{j,n}, \beta_{j,n})$ *sao cho*

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j \subset E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} [\alpha_{j,1}, \beta_{j,1}] \times \cdots \times [\alpha_{j,n}, \beta_{j,n}] \text{ và}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \nu(P_j) = \mu_n(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu([\alpha_{j,1}, \beta_{j,1}] \times \cdots \times [\alpha_{j,n}, \beta_{j,n}]).$$

(ii) *Cho* $E \in \mathfrak{M}_n$. *Khi đó*

$\mu_n(E) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0$, *tồn tại một dãy các ô* $\{(\alpha_{j,1}, \beta_{j,1}) \times \cdots \times (\alpha_{j,n}, \beta_{j,n})\}$, *sao cho*

$E \subset \cup_{j=1}^{\infty} [\alpha_{j,1}, \beta_{j,1}] \times \cdots \times [\alpha_{j,n}, \beta_{j,n}],$

$\sum_{j=1}^{\infty} \nu([\alpha_{j,1}, \beta_{j,1}] \times \cdots \times [\alpha_{j,n}, \beta_{j,n}]) < \varepsilon.$

(iii) *Với mọi $E \subset \mathbb{R}^n$. Khi đó*

$E \in \mathfrak{M}_n \Leftrightarrow$ *tồn tại một dãy các tập mở $\{G_j\}$ và một dãy các tập đóng $\{F_j\}$ trong $\mathbb{R}^n$ sao cho $F_j \subset E \subset G_j \ \forall j \in \mathbb{N}$ và* $\mu_n\left(\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} G_j\right) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j\right)\right) = 0.$

(iv) *Gọi $\mathfrak{N}_n$ là một σ – đại số nhỏ nhất chứa $\mathcal{F}_n$. Khi đó $\mathfrak{N}_n \subset \mathfrak{M}_n$ và*

$\forall E \in \mathfrak{M}_n, \exists A, B \in \mathfrak{N}_n$: $A \subset E \subset B$ *và* $\mu_n(A) = \mu_n(B) = \mu_n(E), \ \mu_n(B \setminus A) = 0.$

3. ĐỘ ĐO TRÊN ĐƯỜNG

Định nghĩa 3.3.1. Cho $f = (f_1, \cdots, f_n) \in C^1((c,d); \mathbb{R}^n)$ và $[a,b] \subset (c,d)$. Ta nói $C = f([a,b])$ là một đường cong thuộc lớp C^1.

Cho $2m+1$ số thực $a_0, a_1, \cdots, a_m, \ c_0, \cdots, c_{m-1}$ là một phân hoạch của đoạn $[a,b]$, tức là

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{m-1} < a_m = b,$$
$$c_i \in [a_i, a_{i+1}] \quad \forall i = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Ta ký hiệu $P = \{a_0, a_1, \cdots, a_m, c_0, c_1, \cdots, c_{m-1}\}$ là phân hoạch của đoạn $[a,b]$.

Độ mịn của phân hoạch P là $|P| = \max_{1 \le i \le m} (a_i - a_{i-1})$.

Đặt $A_i = f(a_i), \forall i = 0, 1, \cdots, m$. Ta tính độ dài của đoạn thẳng A_iA_{i+1}.

Với mỗi i, tồn tại $c_{i,1}, \cdots, c_{i,n} \in [a_i, a_{i+1}]$

$$\begin{aligned} A_iA_{i+1} = \overrightarrow{A_iA_{i+1}} = A_{i+1} - A_i &= f(a_{i+1}) - f(a_i) \\ &= (f_1(a_{i+1}) - f_1(a_i), \cdots, f_n(a_{i+1}) - f_n(a_i)) \\ &= (f_1'(c_{i,1})(a_{i+1} - a_i), \cdots, f_n'(c_{i,n})(a_{i+1} - a_i)). \end{aligned}$$

Vậy

$$|A_iA_{i+1}| = \|A_{i+1} - A_i\| = \sqrt{|f_1'(c_{i,1})|^2 + \cdots + |f_n'(c_{i,n})|^2}\,(a_{i+1} - a_i).$$

Do các hàm $f_1', \cdots, f_n'$ liên tục trên $[a,b]$ nên các hàm nầy cũng liên tục đều trên $[a,b]$. Do đó, khi $|P|$ đủ nhỏ

$$|A_iA_{i+1}| \cong \sqrt{\left|f_1'(c_i)\right|^2 + \cdots + \left|f_n'(c_i)\right|^2}\,(a_{i+1} - a_i) = \left\|f'(c_i)\right\|(a_{i+1} - a_i).$$

Do đó, độ dài của đường gấp khúc $A_0A_1 \cdots A_n$ được xấp xỉ bởi

$$\sum_{i=0}^{m-1} |A_iA_{i+1}| \cong \sum_{i=0}^{m-1} \left\|f'(c_i)\right\|(a_{i+1} - a_i).$$

Do đó, $\sum_{i=0}^{m-1} \left\|f'(c_i)\right\|(a_{i+1} - a_i) \to \int_a^b \left\|f'(t)\right\| dt$ khi $|P| \to 0$.

Định nghĩa 3.3.2. Cho $((c,d), \mathfrak{M}, \mu)$ là một không gian đo và độ đo Lebesgue thu hẹp trên (c,d). Cho $h \in C^1((c,d);\mathbb{R})$. Ta đặt

$$\boxed{\begin{aligned} & f(s) = (s,h(s)),\ \ \forall s \in (c,d), \\ & X = f((c,d)), \\ & \mathfrak{N} = \{f(E) : E \in \mathfrak{M}\}, \\ & \nu(A) = \int_{f^{-1}(A)} \sqrt{1+h'^2}\, d\mu,\ \ \forall A \in \mathfrak{N}. \end{aligned}}$$

Khi đó $(X,\mathfrak{N},\nu)$ là một không gian đo. Ta gọi ν là *độ đo trên đồ thị* X.

Định nghĩa 3.3.3. Cho $((c,d),\mathfrak{M},\mu)$ là một không gian đo và độ đo Lebesgue thu hẹp trên (c,d). Cho $f = (f_1,\cdots,f_n) \in C^1((c,d);\mathbb{R}^n)$. Ta đặt

$$\boxed{\begin{aligned} & X = f(c,d), \\ & \mathfrak{N} = \{f(E) : E \in \mathfrak{M}\}, \\ & \nu(A) = \int_{f^{-1}(A)} \sqrt{f_1'^2 + \cdots + f_n'^2}\, d\mu,\ \ \forall A \in \mathfrak{N}. \end{aligned}}$$

Khi đó $(X,\mathfrak{N},\nu)$ là một không gian đo. Ta gọi ν là *độ đo trên đường cong* X.

Định lý 3.3.1. Cho $((c,d),\mathfrak{M},\mu)$ và $(X,\mathfrak{N},\nu)$ là các không gian đo như trong định nghĩa 3.3.3. Cho $h \in \mathcal{L}(X,\nu)$. Khi đó ánh xạ $t \mapsto h(f(t))\,\|f'(t)\|$ là μ – khả tích trên (c,d) và

$$\boxed{\int_X h d\nu = \int_{(c,d)} h(f(t))\,\|f'(t)\|\, d\mu.}$$

Định nghĩa 3.3.4. (Tích phân đường loại 2). Cho $f = (f_1,\cdots,f_n) \in C^1((c,d);\mathbb{R}^n)$ và $[a,b] \subset (c,d)$. Ta xét $C = f([a,b])$ là một đường cong thuộc lớp C^1. Gọi $Q \subset \mathbb{R}^n$ là một ô chứa C, $F = (F_1,\cdots,F_n) : Q \to \mathbb{R}^n$. Tích phân đường loại 2 của F trên C được ký hiệu là $\int_C F(x)dx$ định nghĩa như sau

$$\begin{aligned} \int_C F(x)dx &= \int_{[a,b]} \left\langle F(f(t)), \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|} \right\rangle \|f'(t)\|\, dt \\ &= \int_a^b \langle F(f(t)), f'(t)\rangle dt = \sum_{i=1}^n \int_a^b F_i(f(t)) f_i'(t) dt. \end{aligned}$$

Định nghĩa 3.3.5. (Tích phân đường loại 2 trong $\mathbb{R}^2$): $f(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $F(x) = (F_1(x), F_2(x))$.

Ta viết và ký hiệu lại

$$\begin{aligned} \int_C F_1 dx_1 + F_2 dx_2 &= \int_C F_1(x)dx_1 + F_2(x)dx_2 = \int_a^b \langle F(f(t)), f'(t)\rangle dt \\ &= \int_a^b \Big[F_1(x_1(t),x_2(t))x_1'(t) + F_2(x_1(t),x_2(t))x_2'(t) \Big] dt. \end{aligned}$$

Hoặc viết theo ký hiệu thông dụng: $f(t) = (x(t),y(t))$, $F(x,y) = (P(x,y),Q(x,y))$.

Ta viết và ký hiệu lại

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \left\langle F(f(t)), f'(t) \right\rangle dt$$
$$= \int_a^b [P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)]dt.$$

Định nghĩa 3.3.6. (Tích phân đường loại 2 trong $\mathbb{R}^3$): $f(t) = x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, $F(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x))$.

Ta viết và ký hiệu lại

$$\int_C F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3 = \int_C F_1(x)dx_1 + F_2(x)dx_2 + F_3(x)dx_3$$
$$= \int_a^b \langle F(f(t)), f'(t) \rangle dt = \int_a^b [F_1(x(t))x_1'(t) + F_2(x(t))x_2'(t) + F_2(x(t))x_2'(t)]dt.$$

Hoặc viết theo ký hiệu thông dụng:

$$f(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)).$$

Ta viết và ký hiệu lại

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz = \int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$
$$= \int_a^b \left\langle F(f(t)), f'(t) \right\rangle dt$$
$$= \int_a^b [P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]dt.$$

4. ĐỘ ĐO TRÊN MẶT

Định nghĩa 3.4.1. Cho $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ là hai vectơ độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^3$. Diện tích hình bình hành S sinh ra bởi 2 vectơ nầy là độ dài của tích hai vectơ (tích có hướng) được cho bởi

$$dt(S) = \|a \times b\|,$$

$a \times b$ là tích hai vectơ a, b được xác định bởi

$$\boxed{\begin{aligned} a \times b &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}, \end{aligned}}$$

ở đây ma trận trên đây viết một cách hình thức để dễ nhớ. Vậy diện tích hình bình hành S là

$$\boxed{dt(S) = \|a \times b\| = \sqrt{(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}\,.}$$

Ta xét mặt cong trong $\mathbb{R}^3$ như sau. Cho U là tập mở trong $\mathbb{R}^2$ và $h \in C^1(U;\mathbb{R})$. Đặt

$$\boxed{S = \{(x, y, h(x,y))\ :\ (x,y) \in U\}.}$$

Ta nói S là đồ thị trên U. Có thể nói một đồ thị là một biến dạng của miền phẳng U thành một mặt theo phương thẳng đứng.

Cho U là tập mở trong $\mathbb{R}^2$ và một đơn ánh $f \in C^1(U;\mathbb{R}^3)$. Ta gọi $S = f(U)$ là một mặt *được tham số hóa trên* U. Cho $a = (x,y) \in U$ và $b = f(a)$. Cho $\varphi = (\varphi_1,\varphi_2) \in C^1((-1,1);U)$ sao cho $\varphi(0) = a$. Đặt $g(t) = f(\varphi(t))\ \forall t \in (-1,1)$. Khi đó $C = g(-1,1)$ là một đường cong nằm trong mặt cong S và đi qua điểm b. Tiếp tuyến của C tại b có phương là vectơ $g'(0)$ và $g'(0)$ cũng được tính theo công thức đạo hàm hàm số hợp

$$g'(0) = Df(\varphi(0)).\varphi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(0))\varphi_1'(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(0))\varphi_2'(0)$$
$$= \varphi_1'(0)\frac{\partial f}{\partial x}(a) + \varphi_2'(0)\frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

Vậy tiếp tuyến với C tại b là đường thẳng

$$D = \{b + t\Big(\varphi_1'(0)\frac{\partial f}{\partial x}(a) + \varphi_2'(0)\frac{\partial f}{\partial y}(a)\Big) : t \in \mathbb{R}\}$$

nằm trong tập hợp

$$P = \{b + s\frac{\partial f}{\partial x}(a) + t\frac{\partial f}{\partial y}(a) : s,t \in \mathbb{R}\}.$$

P chính là mặt phẳng đi qua điểm b và song song với hai vectơ $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ và $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$. Mặt phẳng nầy chứa tất cả các tiếp tuyến tại b của mọi đường cong trong S đi qua b. Ta gọi P là *mặt phẳng tiếp xúc của* S tại b. Về mặt hình học, thì các điểm trên mặt cong S (gần điểm b) khá gần các điểm trên mặt phẳng tiếp xúc P. Điều nầy có thể nhìn lại theo lý luận Toán học bằng cách đặt $a = (x_0,y_0) \in U$, $b = f(a)$. Cho $r > 0$, và xét

$$g(x,y) = f(a) + (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(a) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(a) : (x,y) \in B(a,r).$$

Ta có $g(B(a,r)) \subset P$ và do f khả vi nên $|g(x,y) - f(x,y)|$ khá bé khi r bé.

Cho $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ (khá bé), ta xét $U_1 = [x_0,x_0+\delta_1] \times [y_0,y_0+\delta_2]$ hình chữ nhật trong U. Khi đó $g(U_1)$ là hình bình hành nằm trên mặt phẳng P có hình chiếu lên mặt phẳng Oxy là U_1. Trong khi đó $f(U_1)$ cũng là một mảnh có dạng tứ giác cong nằm trên mặt cong S có hình chiếu lên mặt phẳng Oxy cũng là U_1. Hai hình $f(U_1)$ và $g(U_1)$ cũng khá gần nhau (gần như trùng nhau nếu δ_1, δ_2 khá bé). Như vậy ta có thể xấp xỉ diện tích của mảnh $f(U_1)$ bởi diện tích của hình bình hành $g(U_1)$. Chú ý là hình bình hành $g(U_1)$ nằm trên mặt phẳng tiếp xúc của S tại $b = f(a)$, có một đỉnh là $f(a)$ và có 2 cạnh liên tiếp xác định bởi 2 vectơ $v_1 = \delta_1\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ và $v_2 = \delta_2\frac{\partial f}{\partial y}(a)$. Diện tích của hình bình hành $g(U_1)$ là độ dài của tích vectơ

$$v_1 \times v_1 = \delta_1\delta_2\frac{\partial f}{\partial x}(a) \times \frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

Lý luận tương tự như trong định nghĩa độ dài đường cong, ta có thể định nghĩa diện tích của mặt cong S là tích phân dưới đây

$$dt(S) = \int_U \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right\| dxdy.$$

Cho $S = f(U)$, với $f = (f_1,f_2,f_3) \in C^1(U;\mathbb{R}^3)$, ta viết

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y),\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y),\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y)\right),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y),\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y),\ \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y)\right),$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (w_1, w_2, w_3),$$

với

$$w_1 = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y),$$
$$w_2 = \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y),$$
$$w_3 = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y).$$

Vậy diện tích của mặt cong S là

$$dt(S) = \int_U \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}\, dxdy.$$

Ta có định lý sau đây

Định lý 3.4.1. *Cho Ω là một tập mở của* $\mathbb{R}^2$ và $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu_2)$ là một không gian đo, với μ_2 là độ đo Lebesgue thu hẹp trên Ω. Cho một đơn ánh $f = (f_1, f_2, f_3) \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$. Ta đặt

$$X = f(\Omega),$$
$$\mathfrak{N} = \{f(E) : E \in \mathfrak{M}\},$$
$$w_1 = \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial y},$$
$$w_2 = \frac{\partial f_3}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_3}{\partial y},$$
$$w_3 = \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial y},$$
$$v(A) = \int_{f^{-1}(A)} \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}\, d\mu_2,\ \ \forall A \in \mathfrak{N}.$$

Khi đó $(X, \mathfrak{N}, v)$ là một không gian đo.

Trường hợp đơn giản hơn, đó là S là một đồ thị:

$$S = f(\Omega) = \{(x, y, h(x,y)) : (x,y) \in \Omega\},$$

tức là $f_1(x,y) = x$, $f_2(x,y) = y$, $f_3(x,y) = h(x,y)$. Do đó, $w_1 = -\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)$, $w_2 = -\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)$, $w_3 = 1$. Vậy ta có kết quả sau

Định lý 3.4.2. *Cho Ω là một tập mở của* $\mathbb{R}^2$ và $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu_2)$ là một không gian đo, với μ_2 là độ đo Lebesgue thu hẹp trên Ω. Cho một đơn ánh $h \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$. Ta đặt

$$f(x,y) = (x, y, h(x,y)) \quad \forall (x,y) \in \Omega.$$

Xét một không gian đo $(X, \mathfrak{N}, v)$ như định lý 3.4.1. Khi đó

$$v(A) = \int_{f^{-1}(A)} \sqrt{1 + \left|\frac{\partial h}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial h}{\partial y}\right|^2}\, d\mu_2,\ \ \forall A \in \mathfrak{N}.$$

Khi đó $(X, \mathfrak{N}, v)$ là một không gian đo.

Bây giờ, ta cho $F : S \to \mathbb{R}$ là hàm v –đo được. Tương tự như trong tích phân đường, ta cũng định nghĩa tích phân của hàm F trên mặt cong S như sau

$$\boxed{\int_S F dS = \int_\Omega F(f(x,y)) \sqrt{w_1^2(x,y) + w_2^2(x,y) + w_3^2(x,y)}\, dxdy.}$$

Trường hợp S là một đồ thị thì

$$\boxed{\int_S F dS = \int_\Omega F(x,y,h(x,y)) \sqrt{1 + \left|\frac{\partial h}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial h}{\partial y}\right|^2}\, dxdy.}$$

Cho D là một tập mở của $\mathbb{R}^3$ sao cho mặt cong $S = f(\Omega) \subset D$. Cho $F = (F_1, F_2, F_3) : D \to \mathbb{R}^3$. Tại mỗi điểm $b = f(x,y) \in S$, ta có mặt phẳng P tiếp xúc với S tại b và vectơ $w = (w_1, w_2, w_3)$ vuông góc với P (còn gọi là pháp tuyến của S tại b).

Giả sử $P = \{b + s\frac{\partial f}{\partial x}(a) + t\frac{\partial f}{\partial y}(a) : s, t \in \mathbb{R}\}$ là mặt phẳng tiếp xúc với S tại b, có nghĩa là hai vectơ $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ và $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ là độc lập tuyến tính, tức là $w \neq 0$.

Giả sử rằng mặt cong S là *mặt không kỳ dị*, tức là $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ và $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ là độc lập tuyến tính với mọi $(x,y) \in \Omega$.

Vectơ $n(b) = \frac{w}{\|w\|} = \frac{(w_1, w_2, w_3)}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}}$ gọi là *vectơ pháp tuyến đơn vị* của S tại b. Hình chiếu của $F(b) = (F_1(b), F_2(b), F_3(b))$ trên $n(b)$ là vectơ có số đo đại số là

$$g(b) = \langle F(b), n(b) \rangle = \frac{F_1(b)w_1 + F_2(b)w_2 + F_3(b)w_3}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}}.$$

Do đó, ta định nghĩa tích phân của hàm F trên mặt cong S như sau

$$\boxed{\begin{aligned} \int_S F dS &= \int_\Omega g(b) \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}\, dxdy \\ &= \int_\Omega \frac{F_1(b)w_1 + F_2(b)w_2 + F_3(b)w_3}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}} \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}\, dxdy \\ &= \int_\Omega [F_1(f(x,y))w_1 + F_2(f(x,y))w_2 + F_3(f(x,y))w_3] dxdy. \end{aligned}}$$

Trường hợp S là một đồ thị ta có $f(x,y) = (x, y, h(x,y)) \ \ \forall (x,y) \in \Omega$. Khi đó, tích phân của hàm F trên mặt cong S được tính như sau

$$\boxed{\int_S F dS = \int_\Omega \Big[-F_1(x,y,h(x,y)) \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) - F_2(x,y,h(x,y)) \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) + F_3(x,y,h(x,y))\Big] dxdy.}$$

Chương 4. CÔNG THỨC ĐỔI BIẾN

4.1. ĐỔI BIẾN TÍCH PHÂN MỘT CHIỀU

Định lý 4.1.1. *Cho* $g:(c,d)\to(a,b)$ *là một song ánh thuộc lớp* C^1 và $f\in\mathcal{L}((a,b),\mu)$. Khi đó hàm $t\mapsto f(g(t))|g'(t)|$ cũng thuộc $\mathcal{L}((c,d),\mu)$ và có

$$\int_{(a,b)} f d\mu = \int_{(c,d)} f(g(t))|g'(t)|d\mu.$$

4.2. ĐỔI BIẾN TÍCH PHÂN NHIỀU CHIỀU BẰNG PHÉP BIẾN ĐỔI TUYẾN TÍNH

Ký hiệu δ_{ij} để chỉ số Kronecker, tức là

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$$

Xét vectơ $e_j=(\delta_{1j},\delta_{2j},\cdots,\delta_{mj}),\ j=1,\cdots,m$. Khi đó $\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$ là một hệ m vectơ nằm trên m đường thẳng vuông góc tùng đôi một với nhau của hệ trục tọa độ Descartes, chẳng hạn như:

i/ $\{e_1=(1,0),e_2=(0,1)\}$ trong $\mathbb{R}^2$,

ii/ $\{e_1=(1,0,0),e_2=(0,1,0),e_3=(0,0,1)\}$ trong $\mathbb{R}^3$.

Xét m số thực $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$, ta đặt $a_j=\alpha_j e_j$, với $j=1,\cdots,m$. Khi đó khối hình hộp $P(A)$ tạo bởi các điểm $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m$ có thể tích là

$$Vol(P(A)) \ = |\alpha_1|\cdots|\alpha_m|.$$

Chú ý rằng ma trận $A=[a_1,\cdots,a_m]$ là ma trận chéo và các phần tử trên đường chéo đó chính là $\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_m$. Do đó định thức của A chính là $\alpha_1\cdots\alpha_m$. Vậy, ta có

(1) $$|\det A| = Vol(P(A)).$$

Vậy công thức (1) đúng cho một hệ trực giao $\{a_1,\cdots,a_m\}$ trong $\mathbb{R}^m$. Xét một hệ m vectơ độc lập tuyến tính $\{a_1,\cdots,a_m\}$ trong $\mathbb{R}^m$. Bằng **quá trình trực giao hoá Gram-Schmitt**, ta chuyển hệ $\{a_1,\cdots,a_m\}$ thành một hệ m vectơ trực giao $\{b_1,\cdots,b_m\}$ trong $\mathbb{R}^m$ như sau.

$$\begin{cases} b_1 = a_1, \\ b_k = a_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1} \frac{\langle a_k,b_i\rangle}{\langle b_i,b_i\rangle} b_i, \quad k=2,\cdots,m. \end{cases}$$

Như vậy, ta thấy rằng ma trận $A=[a_1,\cdots,a_m]$ biến thành ma trận $B=[b_1,\cdots,b_m]$ nhờ phép tính sơ cấp trên cột: Thêm vào một cột bằng tổ hợp tuyến tính của các cột khác, do đó theo tính chất của định thức thì $\det A=\det B$. Từ công thức tính thể tích, ta có $Vol(P(A)) = Vol(P(B))$.

Do đó, ta có công thức (1) đúng cho mọi hệ m vectơ độc lập tuyến tính $\{a_1, \cdots, a_m\}$ trong $\mathbb{R}^m$.

Chú ý rằng nếu có một vectơ $a_i = 0$, thì $Vol(P(A)) = 0$ và $\det A = 0$.

Bây giờ cho m vectơ $a_1, \cdots, a_m$ trong $\mathbb{R}^m$, và T là ánh xạ tuyến tính liên kết với ma trận $A = [a_1, \cdots, a_m]$. Cho vectơ $e_j = (\delta_{1j}, \delta_{2j}, \cdots, \delta_{mj}), j = 1, \cdots, m$. Khi đó $\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ là một hệ trực chuẩn (cơ sở trực chuẩn) trong $\mathbb{R}^m$ và $T(e_j) = a_j\ \forall$ $j = 1, \cdots, m$. Gọi P và Q lần lượt là các hình hộp tạo bởi $\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ và $\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$, ta có $T(P) = Q$ và thể tích của $P = 1$. Do đó ta có

Thể tích $T(P) = |\det A|$ thể tích P.

Ta xét một song ánh tuyến tính $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ có ma trận tương ứng là A. Cho $E \subset \mathbb{R}^m$ là $E =$ hội hữu hạn hoặc đếm được các khối vuông $\{P_k\}$ rời nhau. Khi đó, $T(E) = \bigcup_k T(P_k)$ và thể tích của $T(P_k) = |\det A|$ (thể tích P_k). Suy ra

(2) Thể tích $T(E) = |\det A|$ thể tích E.

Khi đó, ta có

Định lý 4.2.1. *Cho một song ánh tuyến tính* $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ có ma trận tương ứng là A. Cho $U \subset \mathbb{R}^m$ là một tập mở và $f \in \mathcal{L}(V, \mu)$, với $V = T(U)$. Khi đó hàm $x \mapsto f(T(x))|\det A|$ cũng thuộc $\mathcal{L}(U, \mu)$ và có

$$\int_V f d\mu = \int_U (f \circ T)|\det A| d\mu.$$

4.3. ĐỔI BIẾN TÍCH PHÂN NHIỀU CHIỀU BẰNG PHÉP BIẾN ĐỔI THUỘC LỚP $\mathbf{C}^1$

Cho $U, V \subset \mathbb{R}^m$ là hai tập mở và một **vi phôi** từ $g : U \to V$ tức là một song ánh $g : U \to V$ sao cho $g \in C^1(U, V)$, và $g^{-1} \in C^1(V, U)$.

Vài ký hiệu: Cho $a = (a_1, \cdots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ và $r > 0$. Ta ký hiệu

$$P(a, r) = [a_1 - r, a_1 + r] \times \cdots \times [a_m - r, a_m + r].$$

Ta ký hiệu $\det Dg(x) = J_g(x)$ là **Jacobian** của g tại x, $\forall x \in U$.

Khi đó, ta có

Định lý 4.3.1. Cho $U, V \subset \mathbb{R}^m$ là hai tập mở và một **vi phôi** từ $g : U \to V$. Cho $b \in U$ và r_0 sao cho $J_g(x) \neq 0$, $\forall x \in P(a, 2r_0)$. Khi đó, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists r_\varepsilon > 0$ sao cho

$$T(P(k(a), (1-\varepsilon)r_\varepsilon)) \subset g(P(a, r)) \subset T(P(k(a), (1+\varepsilon)r_\varepsilon)),$$

$\forall x \in P(b, r_0)$ và $\forall r \in (0, r_\varepsilon)$, trong đó $T = Dg(a)$ và $k = T^{-1} \circ g$. Hơn nữa, r_ε chỉ phụ thuộc vào ε và Dg và Dg^{-1}.

Định lý 4.3.2. Cho $U, V \subset \mathbb{R}^m$ là hai tập mở và một vi phôi từ $g : U \to V$. Cho

$f \in \mathcal{L}(V,\mu)$. Khi đó hàm $x \mapsto f(g(x))|J_g(x)|$ cũng thuộc $\mathcal{L}(U,\mu)$ và có

$$\int_V f d\mu = \int_U f(g(y))|J_g(y)|d\mu.$$

Định lý 4.3.3. Cho $A,B \subset \mathbb{R}^m$ là hai tập đóng, $U,V \subset \mathbb{R}^m$ là hai tập mở sao cho $\mu(A \setminus U) = \mu(B \setminus V) = 0$. Cho $g : A \to B$ liên tục sao cho $g(A \setminus U) \subset B \setminus V$ và $g|U : U \to V$ là một **vi phôi**. Cho $f \in \mathcal{L}(B,\mu)$. Khi đó hàm $x \mapsto f(g(x))|\overline{J}_g(x)|$ cũng thuộc $\mathcal{L}(A,\mu)$ và có

$$\int_B f d\mu = \int_V f d\mu = \int_U f(g(y))|J_g(y)|d\mu = \int_A f(g(y))|\overline{J}_g(y)|d\mu,$$

trong đó,

$$\overline{J}_g(y) = \begin{cases} J_g(y), & y \in U, \\ 0, & y \in A \setminus U. \end{cases}$$

4.4. CÁC PHÉP ĐỔI BIẾN TÍCH PHÂN THÔNG DỤNG

4.4.1. PHÉP ĐỔI BIẾN QUA TỌA ĐỘ CỰC TRONG $\mathbb{R}^2$

Xét

$$g : [0,\infty) \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$(r,\varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \equiv (g_1(r,\varphi), g_2(r,\varphi)).$$
$$Dg(r,\varphi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r} & \frac{\partial g_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial g_2}{\partial r} & \frac{\partial g_2}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix}.$$
$$J_g(r,\varphi) = \det Dg(r,\varphi) = r.$$

Chú ý rằng độ đo Lebesgue của các tập sau đây có độ đo bằng không:

$[0,\infty) \times [0,2\pi] \setminus (0,\infty) \times (0,2\pi)$,

$\{(x,y) : x \in [0,\infty)\}$, với mỗi $y \in \mathbb{R}$.

Dùng định lý 4.3.3 với phép biến đổi qua tọa độ cực trong $\mathbb{R}^2$ cho $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mu)$. Ta đặt

$$f \circ g(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi),\ (r,\varphi) \in [0,\infty) \times [0,2\pi].$$

Khi đó hàm $f \circ g \in \mathcal{L}([0,\infty) \times [0,2\pi],\mu)$ và ta có

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x)dx = \int_{[0,\infty)\times[0,2\pi]} (f \circ g) r d(r,\varphi) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi.$$

Ví dụ 4.1.1. $\int_{\overline{B}_R} f(x)dx$, $\overline{B}_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le R^2\}$: Hình tròn tâm O bán kính R.

$$g : [0,R] \times [0,2\pi] \to \overline{B}_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le R^2\}$$
$$(r,\varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Cho $f \in \mathcal{L}(\overline{B}_R, \mu)$, khi đó hàm $f \circ g \in \mathcal{L}([0,R] \times [0,2\pi], \mu)$ và ta có tích phân $\int_{\overline{B}_R} f(x)dx$ đổi thành

$$\int_{\overline{B}_R} f(x)dx = \int_{[0,R]\times[0,2\pi]} (f \circ g) r d(r,\varphi) = \int_0^R \int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi.$$

Ví dụ 4.1.2. $\int_{\overline{B}_R^+} f(x)dx$, $\overline{B}_R^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le R^2, y \ge 0\}$: Nửa hình phía trên tâm O bán kính R.

$$g : [0,R] \times [0,\pi] \to \overline{B}_R^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le R^2, y \ge 0\}$$
$$(r,\varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Cho $f \in \mathcal{L}(\overline{B}_R^+, \mu)$, khi đó hàm $f \circ g \in \mathcal{L}([0,R] \times [0,\pi], \mu)$ và ta có tích phân $\int_{\overline{B}_R^+} f(x)dx$ đổi thành

$$\int_{\overline{B}_R^+} f(x)dx = \int_{[0,R]\times[0,\pi]} (f \circ g) r d(r,\varphi) = \int_0^R \int_0^{\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi.$$

4.4.2. PHÉP ĐỔI BIẾN QUA TỌA ĐỘ CẦU TRONG $\mathbb{R}^3$

Xét

$$g : [0,\infty) \times [0,2\pi] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$$
$$(r,\varphi,\theta) \mapsto (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) \equiv (g_1(r,\varphi,\theta), g_2(r,\varphi,\theta), g_3(r,\varphi,\theta)).$$

$$Dg(r,\varphi,\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r} & \frac{\partial g_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial g_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial g_2}{\partial r} & \frac{\partial g_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial g_3}{\partial r} & \frac{\partial g_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial g_3}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{bmatrix}.$$

$$J_g(r,\varphi,\theta) = \det Dg(r,\varphi,\theta) = -r^2\sin\theta,$$
$$|J_g(r,\varphi,\theta)| = r^2\sin\theta.$$

Dùng định lý 4.3.3 với phép biến đổi qua tọa độ cầu trong $\mathbb{R}^3$ cho $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mu)$. Ta đặt

$$f \circ g(r,\varphi,\theta) = f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta), \ (r,\varphi,\theta) \in [0,\infty) \times [0,2\pi] \times [0,\pi].$$

Khi đó hàm $f \circ g \in \mathcal{L}([0,\infty) \times [0,2\pi] \times [0,\pi], \mu)$ và ta có

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x)dx = \int_{[0,\infty)\times[0,2\pi]\times[0,\pi]} (f \circ g) r^2 \sin\theta d(r,\varphi,\theta)$$
$$= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta.$$

Ví dụ 4.2.1. $\int_{\overline{B}_R} f(x)dx$, $\overline{B}_R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\}$: Hình cầu tâm O bán kính R.

$$g : [0,R] \times [0,2\pi] \times [0,\pi] \to \overline{B}_R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\}$$
$$(r,\varphi,\theta) \mapsto (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta).$$

Cho $f \in \mathcal{L}(\overline{B}_R,\mu)$, khi đó hàm $f\circ g \in \mathcal{L}([0,R]\times[0,2\pi]\times[0,\pi],\mu)$ và ta có tích phân $\int_{\overline{B}_R} f(x)dx$ đổi thành

$$\int_{\overline{B}_R} f(x)dx = \int_{[0,R]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]} (f\circ g)r^2\sin\theta d(r,\varphi,\theta)$$
$$= \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta drd\varphi d\theta.$$

Ví dụ 4.2.2. $\int_{\overline{B}_R^+} f(x)dx$, $\overline{B}_R^+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le R^2,\ z \ge 0\}$: Nửa hình cầu trên tâm O bán kính R.

$$g : [0,R]\times[0,2\pi]\times[0,\tfrac{\pi}{2}] \to \overline{B}_R^+ = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le R^2, z \ge 0\}$$
$$(r,\varphi,\theta) \mapsto (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta).$$

Cho $f \in \mathcal{L}(\overline{B}_R^+,\mu)$, khi đó hàm $f\circ g \in \mathcal{L}([0,R]\times[0,2\pi]\times[0,\frac{\pi}{2}],\mu)$ và ta có tích phân $\int_{\overline{B}_R^+} f(x)dx$ đổi thành

$$\int_{\overline{B}_R^+} f(x)dx = \int_{[0,R]\times[0,2\pi]\times[0,\frac{\pi}{2}]} (f\circ g)r^2\sin\theta d(r,\varphi,\theta)$$
$$= \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta drd\varphi d\theta.$$

Ví dụ 4.2.3. $\int_\Omega f(x)dx$, $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le R^2,\ x\ge 0,\ y \ge 0,\ z\ge 0\}$: Một phần tám hình cầu góc thứ nhất tâm O bán kính R.

$$g : [0,R]\times[0,\tfrac{\pi}{2}]\times[0,\tfrac{\pi}{2}] \to \Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0, z \ge 0\}$$
$$(r,\varphi,\theta) \mapsto (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta).$$

Cho $f \in \mathcal{L}(\Omega,\mu)$, khi đó hàm $f\circ g \in \mathcal{L}([0,R]\times[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}],\mu)$ và ta có tích phân $\int_\Omega f(x)dx$ đổi thành

$$\int_\Omega f(x)dx = \int_{[0,R]\times[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]} (f\circ g)r^2\sin\theta d(r,\varphi,\theta)$$
$$= \int_0^R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta drd\varphi d\theta.$$

4.4.3. PHÉP ĐỔI BIẾN QUA TỌA ĐỘ TRỤ TRONG $\mathbb{R}^3$

Xét

$$g : [0,\infty)\times[0,2\pi]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$
$$(r,\varphi,z) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \equiv (g_1(r,\varphi,z), g_2(r,\varphi,z), g_3(r,\varphi,z)).$$

$$Dg(r,\varphi,z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r} & \frac{\partial g_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial r} & \frac{\partial g_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \\ \frac{\partial g_3}{\partial r} & \frac{\partial g_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial g_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$J_g(r,\varphi,z) = \det Dg(r,\varphi,z) = r.$$

Dùng định lý 4.3.3 với phép biến đổi qua tọa độ trụ trong $\mathbb{R}^3$ cho $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3,\mu)$. Ta đặt

$$f\circ g(r,\varphi,z) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z),\ \ (r,\varphi,z) \in [0,\infty)\times[0,2\pi]\times\mathbb{R}.$$

Khi đó hàm $f\circ g \in \mathcal{L}([0,\infty)\times[0,2\pi]\times\mathbb{R},\mu)$ và ta có

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x)dx = \int_{[0,\infty)\times[0,2\pi]\times\mathbb{R}} (f\circ g)rd(r,\varphi,z) = \int_0^\infty\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrd\varphi dz.$$

Ví dụ 4.3.1. Cho $h : (a,b) \to [0,\infty)$ liên tục. Ta xét tập $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le h^2(z),\ a < z < b\}$. Khi đó B là khối tròn xoay trong $\mathbb{R}^3$ tạo ra khi cho hình phẳng $D = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le h(z),\ a < z < b\}$ (nằm trong mặt phẳng Oxz) quay tròn xoay quanh trục Oz. Ta muốn tính thể tích của B. Muốn vậy, ta cần tính $\int_B f(x)dx$, với $f = \chi_B =$ hàm đặc trưng của B.

Với phép biến đổi qua tọa độ trụ trong $\mathbb{R}^3$, biến $A = \{(r,\varphi,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le r \le h(z),$ $0 \le \varphi \le 2\pi,\ a < z < b\}$ thành B như sau

$$g : A \to B$$
$$(r,\varphi,z) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z).$$

Với phép biến đổi nầy, hàm $f = \chi_B \in \mathcal{L}(B,\mu)$ sẽ biến đổi thành

$f\circ g(r,\varphi,z) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) = \chi_A(r,\varphi,z),\ (r,\varphi,z) \in A.$ (Hàm đặc trưng của A).

Khi đó hàm $f\circ g = \chi_A \in \mathcal{L}(A,\mu)$ và ta có

$$Vol(B) = \int_{\mathbb{R}^3} \chi_B(x)dx = \int_A (f\circ g)rd(r,\varphi,z) = \int_A \chi_A rd(r,\varphi,z)$$
$$= \int_a^b\int_0^{2\pi}\int_0^{h(z)} rdrd\varphi dz = \int_a^b\int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}h^2(z)d\varphi dz = \pi\int_a^b h^2(z)dz.$$

4.5. SỰ ĐỘC LẬP VÀO CÁCH THAM SỐ HÓA TRONG TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ MẶT.

4.5.1. VỚI TÍCH PHÂN ĐƯỜNG. Trong chương 3, ta đã đề cập đến độ đo và tích phân trên các đường X trong $\mathbb{R}^n$ được thiết lập bởi một đơn ánh $f = (f_1,\cdots,f_n) \in C^1((c,d);\mathbb{R}^n)$. Nếu ta đặt

$$\boxed{\begin{aligned} &X = f(c,d), \\ &\mathfrak{N}_f = \{f(E) : E \in \mathfrak{M}\}, \\ &\nu_f(A) = \int_{f^{-1}(A)} \sqrt{f_1'^2+\cdots+f_n'^2}\,d\mu,\ \ \forall A \in \mathfrak{N}. \end{aligned}}$$

Khi đó $(X, \mathfrak{N}_f, \nu_f)$ là một không gian đo. Ta đã gọi ν_f là *độ đo trên đường cong* X.

Nếu $h \in \mathcal{L}(X, \nu_f)$. Khi đó ánh xạ $t \mapsto h(f(t))\left\|f'(t)\right\|$ là μ – khả tích trên (c,d) và

$$\boxed{\int_X h d\nu_f = \int_{(c,d)} h(f(t))\left\|f'(t)\right\| d\mu.}$$

Bây giờ ta cho hai đơn ánh $f \in C^1((c,d);\mathbb{R}^n)$, $f^* \in C^1((c^*,d^*);\mathbb{R}^n)$ sao cho $f((c,d)) = f^*((c^*,d^*)) = X$. Ta cũng dùng các ký hiệu ν_f và ν_{f^*} là các độ đo tương ứng với f và f^* trên X.

Đặt $g = (f^*)^{-1} \circ f$, khi đó $g \in C^1((c,d);(c^*,d^*))$ là một song ánh thuộc lớp C^1 từ (c,d) vào (c^*,d^*). Hơn nữa ta còn có $f^* \circ g(s) = f(s)$ và $Dg(s) = D((f^*)^{-1})(f(s))Df(s) = [D(f^*)(f(s))]^{-1}Df(s)$, $\forall s \in (c,d)$. Áp dụng công thức đổi biến (một chiều, Định lý 4.1.1), ta có

$$\begin{aligned}\int_X h d\nu_{f^*} &= \int_{(c^*,d^*)} h(f^*(t))\left\|Df^*(t)\right\| d\mu = \int_{(c,d)} h(f^*)(g(s))\left\|Df^*(g(s))\right\| |Dg(s)| d\mu \\ &= \int_{(c,d)} h((f^* \circ g)(s))\left\|Df^*(g(s))Dg(s)\right\| d\mu \\ &= \int_{(c,d)} h((f(s))\|Df(s)\| d\mu = \int_X h d\nu_f.\end{aligned}$$

Điều nầy chứng tỏ tích phân đường trên đường cong X không phụ thuộc vào cách tham số hoá của X.

4.5.2. VỚI TÍCH PHÂN MẶT. Trong chương 3, ta đã đề cập đến độ đo và tích phân trên các mặt S trong $\mathbb{R}^3$ được thiết lập bởi một đơn ánh $f = (f_1,f_2,f_3) \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$, với Ω là một tập mở của $\mathbb{R}^2$. (Định lý 3.4.1)

Nếu $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu_2)$ là một không gian đo, với μ_2 là độ đo Lebesgue thu hẹp trên Ω, và nếu ta đặt

$$\boxed{\begin{aligned}&S = f(\Omega),\\ &\mathfrak{N}_f = \{f(E) : E \in \mathfrak{M}\},\\ &w_1 = \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial y} = J_{(f_2,f_3)},\\ &w_2 = \frac{\partial f_3}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_3}{\partial y} = J_{(f_3,f_1)},\\ &w_3 = \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial y} = J_{(f_1,f_2)},\\ &\nu_f(A) = \int_{f^{-1}(A)} \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}\, d\mu_2, \ \forall A \in \mathfrak{N}_f.\end{aligned}}$$

Khi đó $(S, \mathfrak{N}_f, \nu_f)$ là một không gian đo. Bây giờ, ta cho $F : S \to \mathbb{R}$ là hàm ν_f – đo được. Tích phân của hàm F trên mặt cong S được cho bởi công thức như sau

$$\boxed{\int_S F(s) d\nu_f = \int_\Omega (F \circ f)(s) \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}\, d\mu_2.}$$

Bây giờ ta xét một đơn ánh $f^* = (f_1^*, f_2^*, f_3^*) \in C^1(\Omega^*;\mathbb{R}^3)$, với Ω^* là một tập mở của $\mathbb{R}^2$, sao cho $S = f(\Omega) = f^*(\Omega^*)$. Ta cũng đặt

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{N}_{f^*} = \{f(E) : E \in \mathfrak{M}\},\\
&w_1^* = \frac{\partial f_2^*}{\partial x}\frac{\partial f_3^*}{\partial y} - \frac{\partial f_3^*}{\partial x}\frac{\partial f_2^*}{\partial y} = J_{(f_2^*,f_3^*)},\\
&w_2^* = \frac{\partial f_3^*}{\partial x}\frac{\partial f_1^*}{\partial y} - \frac{\partial f_1^*}{\partial x}\frac{\partial f_3^*}{\partial y} = J_{(f_3^*,f_1^*)},\\
&w_3^* = \frac{\partial f_1^*}{\partial x}\frac{\partial f_2^*}{\partial y} - \frac{\partial f_2^*}{\partial x}\frac{\partial f_1^*}{\partial y} = J_{(f_1^*,f_2^*)},\\
&v_{f^*}(A) = \int_{(f^*)^{-1}(A)} \sqrt{|w_1^*|^2 + |w_2^*|^2 + |w_3^*|^2}\, d\mu_2, \ \ \forall A \in \mathfrak{N}_{f^*}.
\end{aligned}$$

Khi đó $(S, \mathfrak{N}_{f^*}, v_{f^*})$ là một không gian đo. Bây giờ, ta cho $F : S \to \mathbb{R}$ là hàm v_f – đo được. Tích phân của hàm F trên mặt cong S được cho bởi công thức như sau

$$\int_S F(s) dv_{f^*} = \int_{\Omega^*} F \circ f^*(s) \sqrt{|w_1^*|^2 + |w_2^*|^2 + |w_3^*|^2}\, d\mu_2.$$

Giả sử $g \in C^1(\Omega; \Omega^*)$ là một vi phôi từ Ω vào Ω^* sao cho $f^* \circ g(s) = f(s)$. Áp dụng công thức đổi biến (hai chiều)

$$\int_{\Omega^*} k d\mu_2 = \int_\Omega (k \circ g)|J_g| d\mu_2, \ \ \forall k \in \mathcal{L}(\Omega^*, \mu_2).$$

Áp dụng với hàm $k = F \circ f^*(s) \sqrt{|w_1^*|^2 + |w_2^*|^2 + |w_3^*|^2}$, ta có

(*) $$\int_\Omega (F \circ f)(s) \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}\, d\mu_2 = \int_{\Omega^*} (F \circ f^*)(s) \sqrt{|w_1^*|^2 + |w_2^*|^2 + |w_3^*|^2}\, d\mu_2.$$

Do đó

$$\int_S F(s) dv_{f^*} = \int_S F(s) dv_f.$$

Điều nầy chứng tỏ tích phân mặt trên S không phụ thuộc vào cách tham số hoá của mặt S.

Chú thích. Đẳng thức (*) được kiểm nghiệm nếu ta có các đẳng thức sau:

(**) $$w_i = w_i^* J_g, \ \ i = 1, 2, 3.$$

Thật vậy, nếu (**) đúng thì

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^*} (F \circ f^*)(s) \sqrt{|w_1^*|^2 + |w_2^*|^2 + |w_3^*|^2}\, d\mu_2 &= \int_\Omega (F \circ f^*)(g)(s) \sqrt{w_1^2 \circ g + w_2^2 \circ g + w_3^2 \circ g}\, |J_g| d\mu_2\\
&= \int_\Omega (F \circ f^* \circ g)(s) \sqrt{|w_1^* J_g|^2 + |w_2^* J_g|^2 + |w_3^* J_g|^2}\, d\mu_2\\
&= \int_\Omega (F \circ f)(s) \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}\, d\mu_2.
\end{aligned}$$

Ta kiểm tra lại (**) với $i = 1$.

$f = (f_1, f_2, f_3) \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$, với Ω là một tập mở của $\mathbb{R}^2$.

$$g = (f^*)^{-1} \circ f : \Omega \to \Omega^*$$

$$(x, y) \mapsto g = (g_1, g_2)$$

$$f = f^* \circ g = \left(f_1^* \circ g,\, f_2^* \circ g,\, f_3^* \circ g\right)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = D_1 f_1^* \frac{\partial g_1}{\partial x} + D_2 f_1^* \frac{\partial g_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = D_1 f_1^* \frac{\partial g_1}{\partial y} + D_2 f_1^* \frac{\partial g_2}{\partial y},$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = D_1 f_2^* \frac{\partial g_1}{\partial x} + D_2 f_2^* \frac{\partial g_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = D_1 f_2^* \frac{\partial g_1}{\partial y} + D_2 f_2^* \frac{\partial g_2}{\partial y},$$
$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = D_1 f_3^* \frac{\partial g_1}{\partial x} + D_2 f_3^* \frac{\partial g_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_3}{\partial y} = D_1 f_3^* \frac{\partial g_1}{\partial y} + D_2 f_3^* \frac{\partial g_2}{\partial y}.$$

$$\begin{aligned} w_1 = \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial y} &= \left(D_1 f_2^* \frac{\partial g_1}{\partial x} + D_2 f_2^* \frac{\partial g_2}{\partial x}\right)\left(D_1 f_3^* \frac{\partial g_1}{\partial y} + D_2 f_3^* \frac{\partial g_2}{\partial y}\right) \\ &\quad - \left(D_1 f_3^* \frac{\partial g_1}{\partial x} + D_2 f_3^* \frac{\partial g_2}{\partial x}\right)\left(D_1 f_2^* \frac{\partial g_1}{\partial y} + D_2 f_2^* \frac{\partial g_2}{\partial y}\right) \\ &= (D_1 f_2^* D_2 f_3^* - D_1 f_3^* D_2 f_2^*)\left(\frac{\partial g_1}{\partial x}\frac{\partial g_2}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial x}\frac{\partial g_1}{\partial y}\right) \\ &= w_1^* J_g. \end{aligned}$$

Tương tự ta cũng có $w_2 = w_2^* J_g$, $w_3 = w_3^* J_g$.

Chương 5. TÍCH PHÂN TRÊN KHÔNG GIAN TÍCH

5.1. TÍCH PHÂN LẶP

Ta xét $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{M}_n, \mu_n)$ là một không gian đo, với μ_n là độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}^n$. Cho m, $n \in \mathbb{N}$, và $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$. Cho $E \subset \mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, ta đặt

$$E_x = \{y : (x,y) \in E\}, \quad E^y = \{x : (x,y) \in E\}.$$

Định lý 5.1.1. Cho m, $n \in \mathbb{N}$, và $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$. Cho $E \in \mathfrak{M}_{m+n}$. Khi đó tồn tại $A \in \mathfrak{M}_m$ và $B \in \mathfrak{M}_n$ sao cho $\mu_m(A) = 0$, $\mu_n(B) = 0$, $E_x \in \mathfrak{M}_n$ $\forall x \in \mathbb{R}^m \setminus A$ và $E^y \in \mathfrak{M}_m$ $\forall y \in \mathbb{R}^n \setminus B$.

Tức là $E_x = \{y : (x,y) \in E\}$ là tập Lebesgue đo được trong $\mathbb{R}^n$, a.e. $x \in \mathbb{R}^m$ và $E^y = \{x : (x,y) \in E\}$ là tập Lebesgue đo được trong $\mathbb{R}^m$, a.e. $y \in \mathbb{R}^n$.

Cho $f : \mathbb{R}^{m+n} \to \overline{\mathbb{R}}$. Ta đặt

$$f_x(y) = f^y(x) = f(x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n.$$

Định lý 5.1.2. Cho $f : \mathbb{R}^{m+n} \to \overline{\mathbb{R}}$ là hàm Lebesgue đo được trên $\mathbb{R}^{m+n}$. Khi đó tồn tại $A \in \mathfrak{M}_m$ và $B \in \mathfrak{M}_n$ sao cho $\mu_m(A) = 0$, $\mu_n(B) = 0$, f_x là hàm Lebesgue đo được trên $\mathbb{R}^n$, $\forall x \in \mathbb{R}^m \setminus A$ và f^y là hàm Lebesgue đo được trên $\mathbb{R}^m$, $\forall y \in \mathbb{R}^n \setminus B$.

Tức là f_x là hàm Lebesgue đo được trên $\mathbb{R}^n$, a.e. $x \in \mathbb{R}^m$ và f^y là hàm Lebesgue đo được trên $\mathbb{R}^m$, a.e. $y \in \mathbb{R}^n$.

Định lý 5.1.3. Cho Q là tập Lebesgue đo được trong $\mathbb{R}^{m+n}$. Ta đặt

$$f(x,y) = \chi_Q(x,y),\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n,$$

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f_x d\mu_n,\ \forall x \in \mathbb{R}^m,$$

$$\psi(y) = \int_{\mathbb{R}^m} f^y d\mu_m,\ \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Khi đó tồn tại $A \in \mathfrak{M}_m$ và $B \in \mathfrak{M}_n$ sao cho $\mu_m(A) = 0$, $\mu_n(B) = 0$ và

(i) $\varphi\chi_{\mathbb{R}^m \setminus A}$ là một hàm Lebesgue đo được trên $\mathbb{R}^m$ và $\psi\chi_{\mathbb{R}^n \setminus B}$ là một hàm Lebesgue đo được trên $\mathbb{R}^n$.

(ii) $\mu_{m+n}(Q) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi d\mu_m = \int_{\mathbb{R}^n} \psi d\mu_n$.

Chú ý (ii) nghĩa là

$$\mu_{m+n}(Q) = \int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_Q(x,y) d\mu_n\right) d\mu_m = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^m} \chi_Q(x,y) d\mu_m\right) d\mu_n.$$

Định lý 5.1.4 (Định lý Fubini). Cho $f : \mathbb{R}^{m+n} \to [0,\infty]$ là hàm Lebesgue đo được trên $\mathbb{R}^{m+n}$. Khi đó

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f d\mu_{m+n} = \int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f_x d\mu_n\right) d\mu_m = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^m} f^y d\mu_m\right) d\mu_n.$$

Định lý 5.1.5. Cho $f : \mathbb{R}^{m+n} \to \overline{\mathbb{R}}$ là hàm Lebesgue đo được trên $\mathbb{R}^{m+n}$ sao cho

$$\int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f|_x d\mu_n\right)d\mu_m < \infty.$$

Khi đó $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{m+n}, \mu_{m+n})$.

Định lý 5.1.6. (Định lý Fubini). Cho $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{m+n}, \mu_{m+n})$. Khi đó

(i) $f_x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mu_n)$ a.e. $x \in \mathbb{R}^m$,

(ii) $f^y \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mu_m)$ a.e. $y \in \mathbb{R}^n$,

(iii) $\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f d\mu_{m+n} = \int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f_x d\mu_n\right)d\mu_m = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^m} f^y d\mu_m\right)d\mu_n$.

5.2. TÍCH CHẬP

Định lý 5.2.1. Cho $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mu_n)$. Ta đặt

$$\phi_x(y) = \phi(x,y) = f(x-y)g(y),\ x,y \in \mathbb{R}^n.$$

Khi đó

(i) $\phi_x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mu_n)$, a.e. $x \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Đặt $h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{f(x-y)g(y)}_{\phi_x(y)}\, d\mu_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mu_n),\ a.e. x \in \mathbb{R}^n$

và $\int_{\mathbb{R}^n}|h| d\mu_n \leq \int_{\mathbb{R}^n}|f| d\mu_n \int_{\mathbb{R}^n}|g| d\mu_n$.

Định nghĩa 5.2.1. Hàm h trên đây gọi là tích chập của f và g và ký hiệu là $h = f * g$.

Định lý 5.2.2. Cho $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mu_n)$. Giả sử $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ và $\|Df(x)\|$ bị chặn trên $\mathbb{R}^n$. Khi đó

(i) $f * g$ khả vi trên $\mathbb{R}^n$.

(ii) $f * g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ nếu Df liên tục đều trên $\mathbb{R}^n$.

Định lý 5.2.3. Cho $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mu_n)$ và $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),\ g \geq 0$ sao cho $\int_{\mathbb{R}^n} g d\mu_n = 1$. Đặt $g_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} g(\frac{x}{\varepsilon}),\ x \in \mathbb{R}^n,\ \varepsilon > 0$.

Khi đó

(i) $\int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon d\mu_n = 1$.

(ii) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0_+} \int_{\mathbb{R}^n}|f - f * g_\varepsilon| d\mu_n = 0$.

BÀI TẬP

BÀI TẬP.1. Nhắc lại Bổ đề Fatou (Định lý 2.1.3)

Bổ đề Fatou. Cho $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ là một không gian đo và $\{f_m\}$ là dãy hàm đo được từ X và $[0, \infty]$. Khi đó ta có

$$\boxed{\int_X \liminf_{m\to\infty} f_m d\mu \leq \liminf \int_X f_m d\mu.} \quad (*)$$

Cho $E \in \mathfrak{M}$, với $\mu(E) > 0$ và $\mu(E^c) > 0$. Xét dãy hàm $\{f_m\}$ như sau

$$f_m = \begin{cases} \chi_E, & \text{nếu m lẻ,} \\ 1 - \chi_E, & \text{nếu m chẳn.} \end{cases}$$

Nghiệm lại rằng bất đẳng thức (*) là ngặt.

BÀI TẬP.2. Cho $f_m : X \to [0, \infty]$, là dãy hàm đo được trên X và giả sử rằng

(i) $f_1(x) \geq f_2(x) \geq \ldots \geq 0 \quad \forall x \in X$,

(ii) $\lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x) \ \forall x \in X$.

Giả sử $f_1 \in \mathcal{L}(X, \mu)$ Chứng minh rằng $\lim_{m\to\infty} \int_X f_m d\mu = \int_X f d\mu$. Cho phản ví dụ để cho thấy giả thiết "$f_1 \in \mathcal{L}(X, \mu)$" không thể bỏ qua.

BÀI TẬP.3. Cho $f_m : X \to [0, \infty]$, là dãy hàm đo được trên X. Chứng minh rằng tập

$$A = \{x \in X : \{f_m(x)\} \text{ hội tụ}\} \text{ là đo được.}$$

BÀI TẬP.4*. Cho X là tập không đếm được. Ta đặt

$$\mathfrak{M} = \{A \subset X : A \text{ hoặc } A^c \text{ là quá lắm đếm được}\}.$$

Ta định nghĩa $\mu(A) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } A \text{ là quá lắm đếm được,} \\ 1 \text{ nếu } A^c \text{ là quá lắm đếm được.} \end{cases}$

Chứng minh rằng $\mathfrak{M}$ là một -đại số và μ là một độ đo trên $\mathfrak{M}$.

BÀI TẬP.5. Cho $\mu(X) < \infty$, $f_m : X \to \mathbb{C}$ là dãy hàm đo được và bị chận trên X và giả sử rằng $\sup_{x\in X} |f_m(x) - f(x)| \to 0$ khi $m \to \infty$.

Chứng minh rằng $\lim_{m\to\infty} \int_X f_m d\mu = \int_X f d\mu$. Cho phản ví dụ để cho thấy giả thiết "$\mu(X) < \infty$" không thể bỏ qua.

BÀI TẬP.6. Cho $E_k,\ k = 1,2\ldots,$ là tập đo được trên X. Ta đặt

$$E = \{x \in X : x \text{ thuộc vô số các tập } E_k\},$$
$$A = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} E_k.$$

Chứng minh rằng $E = A$.

BÀI TẬP.7. Giả sử $f \in \mathcal{L}(X,\mu)$ Chứng minh rằng

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \mu(E) < \delta \Rightarrow \int_E |f| d\mu < \varepsilon.$$

BÀI TẬP.8. Cho μ là độ đo dương trên X, $f : X \to [0,\infty]$ đo được và $0 < c = \int_X f d\mu < \infty$. Cho $\alpha > 0$. Chứng minh rằng

$$\lim_{m\to\infty} \int_X m \ln\left[1 + \left(\frac{f}{m}\right)^{\alpha}\right] d\mu = \begin{cases} \infty, & 0 < \alpha < 1, \\ c, & \alpha = 1, \\ 0, & 1 < \alpha < \infty. \end{cases}$$

BÀI TẬP.9. Giả sử $\{f_m\} \subset \mathcal{L}(X,\mu)$ sao cho $\lim_{m\to\infty} \int_X |f_m - f| d\mu = 0$ và $f_m(x) \to g(x)$ a,e. $x \in X$, khi $m \to \infty$. Chứng minh rằng $f = g$ a,e. $x \in X$.

BÀI TẬP.10. Cho $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ là một không gian đo với $\mu(X) < \infty$. Giả sử

$$f \in L^{\infty}(X,\mu) = \{f : X \to \mathbb{C} \text{ đo được sao cho có } M \in \mathbb{R} \text{ sao cho } |f(x)| \leq M \text{ a,e. } x \in X\},$$

ta đặt

$$\|f\|_{\infty} = \inf\{M > 0 : |f(x)| \leq M \ a,e. x \in X\}$$

Giả sử $\|f\|_{\infty} > 0$, và ta đặt $\alpha_m = \int_X |f|^m d\mu,\ m = 1,2,3,$...Chứng minh rằng

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\alpha_{m+1}}{\alpha_m} = \|f\|_{\infty}.$$

BÀI TẬP.11. Tính $\lim_{m\to\infty} \int_0^m (1 - \frac{x}{m})^m e^{x/2} dx$.

BÀI TẬP.12. Tính $\lim\limits_{m\to\infty}\int_0^m (1+\frac{x}{m})^m e^{-2x}dx$.

BÀI TẬP.13. Cho $\Phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sao cho $\Phi\left(\int_0^1 f(x)dx\right)\leq\int_0^1\Phi(f(t))dt$, với mọi hàm thực f đo được bị chặn. Chứng minh rằng Φ là hàm lồi, tức là
$\Phi(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda\Phi(x)+(1-\lambda)\Phi(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R},\ \forall\lambda\in[0,1]$.

BÀI TẬP.14. Cho $f\in\mathcal{L}(X,\mu)$. Chứng minh rằng $A=\{x\in X: f(x)\neq 0\}$ là tập có độ đo σ – hữu hạn, tức là $\{x\in X: f(x)\neq 0\}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n,\ \mu(A_n)<\infty\ \forall n\in\mathbb{N}$.

BÀI TẬP.15. Một độ đo dương μ trên X được gọi là σ – hữu hạn nếu $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}X_n$, $\mu(X_n)<\infty\ \forall n\in\mathbb{N}$. Chứng minh rằng μ là σ – hữu hạn $\Leftrightarrow\exists f\in\mathcal{L}(X,\mu): f(x)>0$ $\forall x\in X$.

Hướng dẫn sơ lược BÀI TẬP.1.

$*$ Tính $\liminf\limits_{m\to\infty}\int_X f_m d\mu$

• m lẻ: $\int_X f_m d\mu=\int_X\chi_E d\mu=\mu(E)$,

• m chẵn: $\int_X f_m d\mu=\int_X(1-\chi_E)d\mu=\int_X\chi_{E^c}d\mu=\mu(E^c)$

Do đó $\liminf\limits_{m\to\infty}\int_X f_m d\mu=\sup\limits_k\left(\inf\limits_{m\geq k}\int_X f_m d\mu\right)=\min\{\mu(E),\mu(E^c)\}\ >0$.

$*$ Tính $\liminf\limits_{m\to\infty} f_m$

$*$ $\liminf\limits_{m\to\infty} f_m=\sup\limits_k\left(\inf\limits_{m\geq k} f_m\right)=\min\{\chi_E,\chi_{E^c}\}=0$.

Do đó $\int_X\liminf\limits_{m\to\infty} f_m d\mu=0$.

Vậy $\int_X\liminf\limits_{m\to\infty} f_m d\mu<\liminf\limits_{m\to\infty}\int_X f_m d\mu$.

Hướng dẫn sơ lược BÀI TẬP.2.

Giả sử $f_1\in\mathcal{L}(X,\mu)$. Ta có $\int_X f_m d\mu\to\int_X f d\mu$ do định lý hội tụ bị chặn, bởi vì $|f_m(x)|\leq f_1(x)$.

Cách khác: $0\leq f_1(x)-f_2(x)\leq f_1(x)-f_3(x)\leq\ldots\leq f_1(x)-f_m(x)\uparrow f_1(x)-f(x)$. Dùng định lý hội tụ đơn điệu ta có

$$\int_X(f_1-f_m)d\mu\to\int_X(f_1-f)d\mu$$

hay

$$\int_X f_1 d\mu-\int_X f_m d\mu\to\int_X f_1 d\mu-\int_X f d\mu$$

Do $\int_X f_1 d\mu<\infty$, nên $\int_X f_m d\mu\to\int_X f d\mu$.

Trường hợp bỏ qua giả thiết $f_1\in\mathcal{L}(X,\mu)$. Xét $X=\mathbb{R}$, $f_m=\frac{1}{m}\chi_{[0,\infty)}$. Ta có

$f_1(x)\geq f_2(x)\geq\ldots\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$,

$f_m\to f=0$ (Thậm chí hội tụ đều trên $\mathbb{R}$ về 0)

$\int_{\mathbb{R}} f_m d\mu = \int_0^\infty \frac{1}{m} dx = +\infty \to +\infty \neq \int_{\mathbb{R}} f d\mu = 0.$

Hướng dẫn sơ lược BÀI TẬP.3.

Chú ý rằng $F = \limsup_{m\to\infty} f_m,\ G = \liminf_{m\to\infty} f_m$ là các hàm đo được, do đó

$$A = \{x \in X : \{f_m(x)\} \text{ hội tụ}\} = \{x \in X : \limsup_{m\to\infty} f_m(x) = \liminf_{m\to\infty} f_m(x)\}$$

$$= \{x \in X : F(x) = G(x)\} = (F - G)^{-1}(0) \text{ là đo được.}$$

Hướng dẫn sơ lược BÀI TẬP.4*.

A. $\mathfrak{M}$ là một -đại số.

Ta đặt

$$\mathcal{F}_1 = \{A \subset X : A \text{ là quá lắm đếm được}\},$$

$$\mathcal{F}_2 = \{A \subset X : A^c \text{ là quá lắm đếm được}\}.$$

Ta có $\mathfrak{M} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$. Do X là tập không đếm được, nên $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \phi$.

Trước hết ta có

(i) $X \in \mathfrak{M}$, vì $X^c = \phi \in \mathcal{F}_1$, do đó $X \in \mathcal{F}_2 \subset \mathfrak{M}$.

(ii) $A \in \mathfrak{M} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{M}, ???$

Nếu $A \in \mathcal{F}_1$ thì $(A^c)^c = A \in \mathcal{F}_1$, do đó $A^c \in \mathcal{F}_2 \subset \mathfrak{M}$.

Nếu $A \in \mathcal{F}_2$ thì $A^c \in \mathcal{F}_1 \subset \mathfrak{M}$.

(iii) Bây giờ ta xét $A_j \in \mathfrak{M},\ j \in \mathbb{N}$, ta nghiệm lại rằng $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{M}$.

(j) Nếu $A_j \in \mathcal{F}_1\ \forall j \in \mathbb{N}$, thì $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}_1 \subset \mathfrak{M}$.

(jj) Nếu $\exists j_0 \in \mathbb{N} : A_{j_0} \in \mathcal{F}_2$, thì $A^c = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j^c \subset A_{j_0}^c \in \mathcal{F}_1$. Do đó $A \in \mathcal{F}_2 \subset \mathfrak{M}$.

B. μ là một độ đo trên $\mathfrak{M}$.

Ta viết $\mu(A) = \begin{cases} 0, & A \in \mathcal{F}_1, \\ 1, & A \in \mathcal{F}_2. \end{cases}$

Đặc biệt $\mu(\phi) = 0,\ \mu(X) = 1$. Vậy tính chất đầu tiên là: $\exists A \in \mathfrak{M} : \mu(X) < \infty$ được thỏa.

Bây giờ ta xét họ đếm được rời nhau $A_j \in \mathfrak{M},\ j \in \mathbb{N}$. Ta đặt $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$.

Ta nghiệm lại rằng $\mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).\quad (*)$

(i) Nếu $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}_1$, thì $A_j \in \mathcal{F}_1\ \forall j \in \mathbb{N}$, do đó $\mu(A) = \mu(A_j) = 0,\ \forall j \in \mathbb{N}$. Vậy (*) đúng.

(ii) Nếu $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}_2$, thì $\exists j_0 \in \mathbb{N} : A_{j_0} \in \mathcal{F}_2$, (vì nếu ngược lại thì $A_j \in \mathcal{F}_1$ $\forall j \in \mathbb{N}$, do đó $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}_1$. mà điều nầy dẫn đến $A \notin \mathcal{F}_2$. Mâu thuẫn).

Mặt khác, $A_{j_0} \cap A_j = \phi\ \forall j \neq j_0$, nên $A_j \subset A_{j_0}^c$. Mà $A_{j_0}^c$ là quá lắm đếm được, nên A_j là quá lắm đếm được $\forall j \neq j_0$. Vậy $\mu(A_j) = 0,\ \forall j \neq j_0$. Và như thế ta có

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = \mu(A_{j_0}) + \sum_{j \neq j_0} \mu(A_j) = \mu(A_{j_0}) = 1 = \mu(A).$$ Vậy (*) đúng.

Hướng dẫn sơ lược BÀI TẬP.5.

Giả sử $\mu(X) < \infty$.

Do $\sup_{x \in X} |f_m(x) - f(x)| \to 0$ khi $m \to \infty$, nên tồn tại m_0 sao cho

$$|f_m(x) - f_{m_0}(x)| < 1\ \forall x \in X,\ \forall m \geq m_0\ .$$

Do đó

$$|f_m(x)| < 1 + |f_{m_0}(x)| \equiv g(x)\ \forall x \in X,\ \forall m \geq m_0\ .$$

Do f_{m_0} bị chặn và $\mu(X) < \infty$, nên $g \in \mathcal{L}(X, \mu)$. Do định lý hội tụ bị chặn, ta có $\int_X f_m d\mu \to \int_X f d\mu$.

Phản ví dụ cho trường hợp giả thiết "$\mu(X) < \infty$" bị bỏ qua.

Xét $X = [0, \infty)$, $f_m = \frac{1}{m}\chi_{[0,m]}$. Ta có $f_m \to f = 0$ đều trên X, nhưng

$$\int_X f_m d\mu = \int_0^{\infty} \frac{1}{m}\chi_{[0,m]} d\mu = 1,\ \forall m \in \mathbb{N}.$$
$$\int_X f_m d\mu = 1 \to 1 \neq \int_X f d\mu = 0.$$

#

Hướng dẫn sơ lược BÀI TẬP.6.

$$x \in A = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} E_k \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N},\ x \in \bigcup_{k=m}^{\infty} E_k$$
$$\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N},\ \exists k_m \geq m : x \in E_{k_m}$$
$$\Leftrightarrow x \in E_k \text{ với vô số các tập } E_k.$$

#

Hướng dẫn sơ lược BÀI TẬP.7.

Chọn dãy các hàm đơn $\{s_m\}$ sao cho

$$0 \leq s_m(x) \uparrow |f|(x) \text{ khi } m \to \infty,\ \forall x \in X.$$

Dùng định lý hội tụ đơn điệu ta có

$$\int_X s_m d\mu \uparrow \int_X |f| d\mu < \infty$$

Do đó, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists m_0$:

$$0 \leq \int_E (|f| - s_{m_0}) d\mu \leq \int_X (|f| - s_{m_0}) d\mu < \tfrac{\varepsilon}{2}\ \ \forall E \in \mathfrak{M}.$$

Do s_{m_0} là hàm đơn và khả tích, do đó

$$\exists M > 0 : s_{m_0}(x) \leq M \;\; a.e. \;\; x \in X.$$

Chọn $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$, khi đó, nếu $E \in \mathfrak{M}, \; \mu(E) < \delta,$ ta có

$$\int_E |f| d\mu \leq \int_E (|f| - s_{m_0}) d\mu + \int_E s_{m_0} d\mu$$
$$\leq \int_E (|f| - s_{m_0}) d\mu + M\mu(E) < \frac{\varepsilon}{2} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

#

Hướng dẫn sơ lược BÀI TẬP.8.

Chú ý đến công thức

$$\lim_{m\to\infty} m \ln(1 + \tfrac{u}{m}) = u \;\; \forall u \geq 0$$

Vậy

$$\lim_{m\to\infty} m^\alpha \ln[1 + (\tfrac{t}{m})^\alpha] = t^\alpha \;\; \forall t \geq 0$$

hay

$$\lim_{m\to\infty} m^{\alpha-1} \underbrace{m \ln[1 + (\tfrac{t}{m})^\alpha]}_{G_m(t)} = t^\alpha \;\; \forall t \geq 0$$

hay

$$\lim_{m\to\infty} \frac{G_m(t)}{m^{1-\alpha}} = t^\alpha \;\; \forall t > 0.$$

Suy ra

$$\lim_{m\to\infty} \frac{G_m(t)}{m^{1-\alpha}} = \begin{cases} 0, & \alpha > 1, \\ \infty, & 0 < \alpha < 1, \; t > 0, \quad (*) \\ t, & \alpha = 1. \end{cases}$$

#

Ta xét $f_m(x) = G_m(f(x)) = m \ln\left[1 + \left(\frac{f(x)}{m}\right)^\alpha\right]$

(i) Xét $1 \leq \alpha < +\infty$. $\mu(\{x \in X : f(x) = \infty\}) = 0$. Từ $(*)_{1,3}$ ta suy ra

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x) = \begin{cases} 0, & 1 < \alpha < \infty, \; a.e.x \in X, \\ f(x), & \alpha = 1, \; a.e.x \in X. \end{cases}$$

#

Chú ý rằng,

$$1 + t^\alpha \leq (1+t)^\alpha \;\; \forall \alpha \geq 1, \; \forall t \geq 0.$$
$$\ln(1 + t^\alpha) \leq \alpha \ln(1+t) \leq \alpha t, \;\; \forall \alpha \geq 1, \; \forall t \geq 0.$$

#

Vậy

$$0 \leq f_m(x) = m \ln\left[1 + \left(\frac{f(x)}{m}\right)^\alpha\right] \leq m\alpha \frac{f(x)}{m} = \alpha f(x)$$

Do định lý hội tụ bị chặn, ta có $\int_X f_m d\mu \to \int_X f d\mu$.

$$\lim_{m\to\infty} \int_X m \ln\left[1 + \left(\frac{f}{m}\right)^{\alpha}\right] d\mu = \lim_{m\to\infty} \int_X f_m d\mu = \begin{cases} 0, & 1 < \alpha < \infty, \\ \int_X f d\mu, & \alpha = 1. \end{cases} \qquad \#$$

(ii) Xét $0 < \alpha < 1$. $E = \{x \in X : f(x) > 0\}$. Suy ra $\mu(E) > 0$, vì $\int_X f d\mu > 0$ (vì nếu ngược lại thì $\mu(E) = 0$, sẽ dẫn đến $\int_E f d\mu = 0$, $\int_{X \setminus E} f d\mu = 0$ (do $f = 0$ trên $X \setminus E$. Điều nầy sẽ mâu thuẫn với $\int_X f d\mu > 0$, bởi vì $\int_X f d\mu = \int_E f d\mu + \int_{X \setminus E} f d\mu = 0$)

Ta có

$$\begin{aligned} &\lim_{m\to\infty} f_m(x) = +\infty,\ x \in E,\ 0 < \alpha < 1, \\ &f_m(x) = m \ln\left[1 + \left(\frac{f(x)}{m}\right)^{\alpha}\right] = 0,\ x \notin E. \end{aligned} \qquad \#$$

Do bổ đề Fatou,

$$\begin{aligned} \liminf_{m\to\infty} \int_X f_m d\mu &\geq \int_X \liminf_{m\to\infty} f_m d\mu \\ &= \int_X \lim_{m\to\infty} f_m d\mu \geq \int_E \lim_{m\to\infty} f_m d\mu = \int_E \infty d\mu = +\infty \end{aligned} \qquad \#$$

(do $\mu(E) > 0$).

Do đó $\liminf_{m\to\infty} \int_X f_m d\mu = +\infty$, vậy $\limsup_{m\to\infty} \int_X f_m d\mu = +\infty = \lim_{m\to\infty} \int_X f_m d\mu$

Vậy $\lim_{m\to\infty} \int_X m \ln\left[1 + \left(\frac{f}{m}\right)^{\alpha}\right] d\mu = +\infty$.

Hướng dẫn sơ lược BÀI TẬP.9.

Do $\lim_{m\to\infty} \int_X |f_m - f| d\mu = 0$, dẫn đến tồn tại một dãy con $\{f_{m_k}\} \subset \{f_m\}$, sao cho

$f_{m_k}(x) \to f(x)$ a,e. $x \in X$.

Mà $f_m(x) \to g(x)$ a,e. $x \in X$, khi $m \to \infty$, cũng dẫn đến

$f_{m_k}(x) \to g(x)$ a,e. $x \in X$.

Do đó $f = g$ a,e. $x \in X$.

Hướng dẫn sơ lược BÀI TẬP.10.

Nếu có một m sao cho $\alpha_m = \int_X |f|^m d\mu = 0$ thì $|f|^m d\mu = 0$ a,e. $x \in X$, do đó $\|f\|_{\infty} = 0$.

Vậy $\alpha_m > 0\ \forall m \in \mathbb{N}$.

Ta có

$|f|^{m+1} = |f||f|^m \leq \|f\|_{\infty} |f|^m$ a,e. $x \in X$.

Do đó

$$\alpha_{m+1} \leq \|f\|_\infty \alpha_m.$$

Điều nầy dẫn đến

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{\alpha_{m+1}}{\alpha_m} \leq \|f\|_\infty. \quad (*)$$

Cho $c > 0,\ 0 < c < \|f\|_\infty$.

Đặt $E = \{x \in X : c \leq |f(x)| \leq \|f\|_\infty\}$. Suy ra $\mu(E) > 0$,

Trên E^c, ta có:

$$|\tfrac{1}{c}f| < 1, \text{ và } |\tfrac{1}{c}f|^m \downarrow 0.$$

Vì $\mu(E^c) < \mu(E) < \infty$, Do định lý hội tụ bị chặn, ta có

$$\int_{E^c} |\tfrac{1}{c}f|^m d\mu \to 0$$

Mặt khác ta có

$$\int_E |\tfrac{1}{c}f|^m d\mu \geq \int_E 1 d\mu = \mu(E) > 0$$

Ta suy ra

$$\liminf_{m\to\infty} \frac{\int_X |\frac{1}{c}f|^{m+1} d\mu}{\int_X |\frac{1}{c}f|^m d\mu} = \liminf_{m\to\infty} \frac{\int_E |\frac{1}{c}f|^{m+1} d\mu + \int_{E^c} |\frac{1}{c}f|^{m+1} d\mu}{\int_E |\frac{1}{c}f|^m d\mu + \int_{E^c} |\frac{1}{c}f|^m d\mu}$$

#

$$= \liminf_{m\to\infty} \frac{\int_E |\frac{1}{c}f|^{m+1} d\mu}{\int_E |\frac{1}{c}f|^m d\mu}.$$

Nhưng trên E, ta có:

$$|\tfrac{1}{c}f|^{m+1} = |\tfrac{1}{c}f||\tfrac{1}{c}f|^m \geq |\tfrac{1}{c}f|^m.$$

Ta suy ra

$$\int_E |\tfrac{1}{c}f|^{m+1} d\mu \geq \int_E |\tfrac{1}{c}f|^m d\mu.$$

Do đó

$$\liminf_{m\to\infty} \frac{\int_X |\frac{1}{c}f|^{m+1} d\mu}{\int_X |\frac{1}{c}f|^m d\mu} \geq 1.$$

Điều nầy dẫn đến

$$\liminf_{m\to\infty} \frac{\alpha_{m+1} c^{-m-1}}{\alpha_m c^{-m}} \geq 1.$$

hay

$$\liminf_{m\to\infty} \frac{\alpha_{m+1}}{\alpha_m} \geq c.$$

Điều nầy đúng với mọi $c < \|f\|_\infty$, do đó $\liminf\limits_{m\to\infty} \frac{\alpha_{m+1}}{\alpha_m} \geq \|f\|_\infty$.

$$\liminf_{m\to\infty} \frac{\alpha_{m+1}}{\alpha_m} \geq \|f\|_\infty. \quad (**)$$

Cuối cùng (*) và (**) dẫn đến tồn tại $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{\alpha_{m+1}}{\alpha_m} = \|f\|_\infty$.

Hướng dẫn sơ lược BÀI TẬP.11.

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^m (1-\tfrac{x}{m})^m e^{x/2}dx = \lim_{m\to\infty} \int_0^\infty (1-\tfrac{x}{m})^m e^{x/2}\chi_{[0,m]}dx = \lim_{m\to\infty} \int_0^\infty f_m(x)dx.$$

$$f_m(x) = (1-\tfrac{x}{m})^m e^{x/2}\chi_{[0,m]} = \begin{cases} (1-\frac{x}{m})^m e^{x/2}, & 0 \leq x \leq m, \\ 0, & x \geq m. \end{cases}$$

Chú ý rằng $\lim\limits_{m\to\infty} (1-\frac{x}{m})^m = e^{-x}\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Cho $x \in [0,\infty)$: $\forall m \geq x$, ta có

$$f_m(x) = (1-\tfrac{x}{m})^m e^{x/2}\chi_{[0,m]} = (1-\tfrac{x}{m})^m e^{x/2} \to e^{-x}e^{x/2} = e^{-x/2}.$$

Vậy $\lim\limits_{m\to\infty} f_m(x) = f(x) = e^{-x/2}\ \forall x \geq 0$.

Chú ý đến bất đẳng thức

$$e^x \geq 1 + x\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thay x bởi $-\frac{x}{m}$, ta có

$$e^{-\frac{x}{m}} \geq 1 - \tfrac{x}{m},\ \forall m \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra

$$e^{-x} \geq (1-\tfrac{x}{m})^m,\ \forall m \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,m].$$

$$(1-\tfrac{x}{m})^m e^{x/2} \leq e^{-x/2},\ \forall m \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,m].$$

$$0 \leq f_m(x) = (1-\tfrac{x}{m})^m e^{x/2}\chi_{[0,m]} \leq e^{-x/2} \equiv g(x),\ \forall m \in \mathbb{N},\ \forall x \geq 0.$$

g khả tích và do định lý hội tụ bị chặn, ta có

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^m (1-\tfrac{x}{m})^m e^{x/2}dx = \lim_{m\to\infty} \int_0^\infty f_m(x)dx = \int_0^\infty e^{-x/2}dx$$

$$= \lim_{m\to\infty} \int_0^\infty e^{-x/2}\chi_{[0,m]}dx$$

$$= \lim_{m\to\infty} \int_0^m e^{-x/2}dx = \lim_{m\to\infty} (2 - 2e^{-m/2}) = 2$$

Hướng dẫn sơ lược BÀI TẬP.12.

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^m (1+\tfrac{x}{m})^m e^{-2x}dx = \lim_{m\to\infty} \int_0^\infty (1+\tfrac{x}{m})^m e^{-2x}\chi_{[0,m]}dx = \lim_{m\to\infty} \int_0^\infty f_m(x)dx.$$

$$f_m(x) = (1+\tfrac{x}{m})^m e^{-2x}\chi_{[0,m]} = \begin{cases} (1+\tfrac{x}{m})^m e^{-2x}, & 0 \le x \le m, \\ 0, & x \ge m. \end{cases}$$

Vậy $\lim\limits_{m\to\infty} f_m(x) = f(x) = e^{-x}\ \forall x \ge 0.$

Chú ý đến bất đẳng thức

$$e^x \ge 1 + x\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thay x bởi $\frac{x}{m}$, ta có

$$e^{\frac{x}{m}} \ge 1 + \tfrac{x}{m},\ \forall m \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra

$$e^x \ge (1+\tfrac{x}{m})^m,\ \forall m \in \mathbb{N},\ \forall x \ge 0.$$

$$(1+\tfrac{x}{m})^m e^{-2x} \le e^{-x},\ \forall m \in \mathbb{N},\ \forall x \ge 0. \qquad \#$$

$$0 \le f_m(x) = (1+\tfrac{x}{m})^m e^{-2x}\chi_{[0,m]} \le e^{-x} \equiv g(x),\ \forall m \in \mathbb{N},\ \forall x \ge 0.$$

g khả tích và do định lý hội tụ bị chặn, ta có

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty}\int_0^m (1+\tfrac{x}{m})^m e^{-2x}dx &= \lim_{m\to\infty}\int_0^\infty (1+\tfrac{x}{m})^m e^{-2x}\chi_{[0,m]}dx \\ &= \lim_{m\to\infty}\int_0^\infty f_m(x)dx = \int_0^\infty e^{-x}dx \\ &= \lim_{m\to\infty}\int_0^\infty e^{-x}\chi_{[0,m]}dx \\ &= \lim_{m\to\infty}\int_0^m e^{-x}dx = \lim_{m\to\infty}(1-e^{-m}) = 1. \end{aligned} \qquad \#$$

Hướng dẫn sơ lược BÀI TẬP.13.

Cho $x, y \in \mathbb{R}$, và $\lambda \in [0,1]$. Chọn $f = x\chi_{[0,\lambda]} + y\chi_{[\lambda,1]}$. Ta có

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t)dt &= \int_0^\lambda f(t)dt + \int_\lambda^1 f(t)dt = \int_0^\lambda x\chi_{[0,\lambda]}dt + \int_\lambda^1 y\chi_{[\lambda,1]}dt \\ &= \lambda x + (1-\lambda)y. \end{aligned}$$

Vậy

$$\Phi\left(\int_0^1 f(x)dx\right) = \Phi(\lambda x + (1-\lambda)y)$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Phi(f(t))dt &= \int_0^\lambda \Phi(f(t))dt + \int_\lambda^1 \Phi(f(t))dt = \int_0^\lambda \Phi(x)dt + \int_\lambda^1 \Phi(y))dt \\ &= \lambda\Phi(x) + (1-\lambda)\Phi(y). \end{aligned}$$

Hướng dẫn sơ lược BÀI TẬP.14.

$$\{x \in X : f(x) \neq 0\} = \{x \in X : |f(x)| > 0\}$$
$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{x \in X : |f(x)| > \tfrac{1}{n}\}}_{A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

Do $|f(x)| > \frac{1}{n}\ \forall x \in A_n,$ ta có

$$\mu(A_n) = \int_{A_n} d\mu \leq \int_{A_n} n|f|d\mu \leq n\int_X |f|d\mu < \infty.$$

Hướng dẫn sơ lược BÀI TẬP.15.

Giả sử μ là σ – hữu hạn. Do đó $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n,\ \mu(X_n) < \infty\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Đặt $E_n = X_n \setminus (X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_{n-1})$. Khi đó các tập E_n rời nhau và $\mu(E_n) < \infty\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Xét hàm $f : X \to \mathbb{R}$ như sau

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n^2\mu(E_n)}, & \text{nếu } x \in E_n \text{ và } \mu(E_n) > 0, \\ 1, & \text{nếu } x \in E_n \text{ và } \mu(E_n) = 0, \end{cases}$$

Ta có $f(x) > 0\ \forall x \in X$ và $f = \sum\limits_n \frac{\chi_{E_n}}{n^2\mu(E_n)}$, với $\sum\limits_n$ được lấy trên tất cả các n sao cho $\mu(E_n) > 0$. Do định lý hội tụ đơn điệu, ta có

$$\int_X f d\mu \leq \sum_n \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Vậy nếu μ là σ – hữu hạn, ta có $f \in \mathcal{L}(X,\mu) : f(x) > 0\ \forall x \in X.$

Đảo lại, nếu $f \in \mathcal{L}(X,\mu) : f(x) > 0\ \forall x \in X$, thì

$$X = \{x \in X : f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{x \in X : f(x) > \tfrac{1}{n}\}}_{X_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

$$\mu(X_n) = \int_{X_n} d\mu \leq \int_{X_n} n|f|d\mu \leq n\int_X |f|d\mu < \infty.$$